MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

HUSZONEGYEDIK ÉVFOLYAM

I., II., III., IV. FÜZET 1912 JAN.—FEBR.—MÁRC.—ÁPR.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1912.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24—30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszonegyedik társulati év 1912 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, szíveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* egyet. magántanár (I., Bors-u. 18.) czímére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak néhány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kívánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivőtitkár czímére **VIII., Múzeum-körút 6.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

HUSZONEGYEDIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1912

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONEGYEDIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első, második, harmadik és negyedik füzet.

Ötödik, hatodik, hetedik és nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Társulati ügyek. Tanulóverseny.

ANALITIKAI ÉS FÜGGVÉNYEK ALGEBRAI ÉS LOGARITHMIKUS SZINGULARITÁSAIRÓL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Logaritmikus pontok.

28. A logaritmikus pontok vizsgálatára előnyösnek mutatkozik a Lindelöf-féle függvény használata összegező függvény gyanánt. Függvényünk az x_0 helyen

$$\lim_{x=x_0} f(x) = \lim_{a=\infty} M(a) = \lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}},$$

hol $s_n(x_0) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x_0^n$.

Vizsgáljuk előbb ezen $M(a)$ függvényt oly x_0 pontokban, hol

$$f(x) = A \log^q \frac{1}{1-\frac{x}{x_0}} + \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ az x_0 pontban negativrendű. Az ily pontokat, ha $q=1$ elsőrendű logaritmikus pontoknak neveztük. Az ily pontokra vonatkozó s most megállapitandó eredményünket minden egész q-rendű logaritmikus pontra ki fogjuk terjeszteni. A függvény két részre bontásának megfelelően

$$M(a) = M'(a) + M''(a),$$

hol $M''(a)$-ról tudjuk,[1] hogy

$$\lim_{a=\infty} M''(a) = \varphi(x_0),$$

mert $\varphi(x_0)$ negativrendű az x_0 pontban. Képezzük most $M(a)$-nak $M'(a)$ részét.

$$M'(a) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \log n \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{[\log(n+\beta)^n]}} = \frac{L(a)}{E(a)},$$

hol a logaritmikus rész $s_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ részletösszege helyébe a vele egyenlően növő $\log n$ értéket írtuk.

Cesàro tételének felhasználásával írhatjuk egyszer a $\log n$ helyett a $\log(n+\beta)$ értéket a számlálóban, hogy egyszerűsíthessünk s így

$$L(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n-1}}.$$

Vegyük most, β tetszőleges lévén, a $\beta = e$ értéket, akkor

$$L(a) = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{\log(n+e)} + \frac{a^3}{[\log(n+e)]^2} + \cdots$$

tehát

$$\frac{L(a)-1}{a} = 1 + \frac{a}{\log(n+e)} + \frac{a^2}{[\log(n+e)]^2} + \cdots = E(a),$$

tehát

$$L(a) = aE(a) + 1,$$

azaz

$$\lim_{a=\infty} \frac{L(a)}{aE(a)} = 1,$$

vagyis az $\frac{L(a)}{E(a)}$ hányados úgy nő, mint a. Ugyanezt az okoskodást lépésről-lépésre ismételve kapjuk, hogy ha

[1] P. Dienes: Essai etc. § VII.

$$L(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\log^q(n+\beta)\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n},$$

azaz

$$L(a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n-q}}$$

vagyis részletesen

$$L(a)=1+\frac{a}{[\log(1+\beta)]^{1-q}}+\frac{a^2}{[\log(2+\beta)]^{2-q}}+\cdots$$

$$\cdots+a^q+\frac{a^{q+1}}{\log(q+1+\beta)}+\frac{a^{q+2}}{[\log(q+2+\beta)]^2}+\cdots$$

Ha most a^q-val osztunk s az a $1, 2, \ldots, q-1$ hatványai mellett álló numerikus együtthatókat $c_1 \ldots c_{q-1}$-gyel jelöljük, s tekintettel vagyunk arra, hogy $L(a)$-nak első q tagjára nézve áll, hogy

$$\lim_{a=\infty}\frac{1-(c_1a+c_2a^2+\cdots+c_{q-1}a^{q-1})}{a^q}=0,$$

akkor

$$\lim_{a=\infty}\left[1+\frac{a}{[\log(1+q+\beta)]}+\frac{a^2}{[\log(2+q+\beta)]^2}+\cdots\right]\frac{a^q}{L(a)}=1.$$

A zárójelben levő kifejezés nem egyéb, mint

$$E_{q+\beta}(a)=CE_\beta(a),$$

hol

$$\lim_{a=\infty}C=1,$$

mert általában a Cesaro-tétel értelmében, a

$$\lim_{n=\infty}\left]\frac{\log(n+k_1)}{\log(n+k_2)}\right]^n=1$$

egyenlőségből folyólag,

$$\lim_{a=\infty}\frac{E_{k_1}(a)}{E_{k_2}(a)}=1.$$

A Lineelöf*-féle E_β egész függvények növekedése független tehát a β indextől.*

Tehát tekintet nélkül β választására

$$\lim_{a=\infty}\frac{L(a)}{a^qE(a)}=1.$$

A $\varphi(x)$-re vonatkozó egyenlőség tekintetbe vételével ebből következik, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{M(a)}{a^q} = A$$

és általában az $E_\beta(a)$-val képezett

$$\lim F(a, x_0)$$

sorozat függvényeit felhasználva

$$\lim_{a=\infty} \frac{F(a, x_0)}{a^q} = A,$$

vagyis *a* MITTAG-LEFFLER LINDELÖF-*féle ábrázolásban a szinguláris rész logaritmusának minden hatványa a-nak egy hatványával növeli az ábrázoló egész függvény növekedésfokát.*

29. Vegyük hasonló vizsgálat alá a logaritmikus pólusokat, vagyis azokat a pontokat, melyekben függvényünk így írható

$$f(x) = A \frac{\log^q \dfrac{1}{1-x}}{(1-x)^\varrho} + \varphi(x),$$

hol $\varphi(x)$ rendje kisebb, mint ρ s ennélfogva a (33) alatti eredmény értelmében könnyen látható, hogy a $\varphi(x)$-re x_0 pontban képezett

$$\lim_{a=\infty} \frac{M''(a)}{a^\varrho f_\varrho(a)} = 0.$$

Legyen továbbá egyelőre $\rho = 1$ és $q = 1$. Akkor az $M'(a)$, (8)-ra való tekintettel így írható

$$M'(a) = A \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) \log(n+\beta) \dfrac{a^n}{(\log(n+\beta))^n}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{(\log(n+\beta))^n}} = \frac{\Lambda(a)}{E(a)} A,$$

hol a számlálóban, mivel csak a növekedést akarjuk vizsgálni, β helyett $\beta - 1$ tehető s így

$$\Lambda(a) = \log(\beta - 1) + 2a + \frac{3a^2}{[\log(1+\beta)]} + \frac{4a^3}{[\log 2(+\beta)]^2} + \cdots$$

azaz

$$\Lambda(a) = \frac{d}{da}\left(a^2E_\beta(a)\right) + \log(\beta-1) = 2aE_\beta(a) + a^2E'_\beta(a) + \log(\beta-1),$$

tehát

$$\frac{\Lambda(a)}{E_\beta(a)} = 2a + a^2\frac{E'_\beta(a)}{E_\beta(a)}.$$

Nevezzük el az

$$\frac{E'(a)}{E(a)} = f_1(a)$$

függvényt, akkor látjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty}\frac{M(a)}{a^2f_1(a)} = A,$$

tehát az *elsőrendű pólus a-nak egy hatványával és $f_1(a)$-val növeli a függvény növekedését.*

30. Megismételjük a gondolatmenetet tetszőleges ρ egész számra vonatkozólag.

$$L(a) = \frac{1}{\rho!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\ldots(n+\rho)\log^q(n+\beta)\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} =$$
$$= \frac{1}{\rho!}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ldots(n+\rho)\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n-q}},$$

a hol a sort kiírva, látjuk, hogy

$$L(a) = P_q(a) + \frac{1}{\rho!}\left(\frac{d^\varrho}{da^\varrho}\cdot a^{\varrho+q}E_{\beta+q}(a)\right)$$

s a differencziálást végrehajtva és

$$f_\varrho(a) = \frac{E^{(\varrho)}(a)}{E(a)}$$

elnevezést használva kapjuk, minthogy bármely i indexű $E_i(a)$ függvény egyenlő növekedésű,

$$\lim_{a=\infty}\frac{M'(a)}{a^{q+\varrho}f_\varrho(a)} = \frac{1}{\rho!}$$

és $\varphi(x)$-re vonatkozó föltevésünk alapján

$$\lim_{a=\infty}\frac{M(a)}{a^{q+\varrho}f_\varrho(a)} = \frac{A}{\rho!}$$

és ugyanígy a vizsgálni szándékolt sorozat függvényeire nézve is

$$\lim_{a=\infty} \frac{F(a, x_0)}{a^{q+\varrho} f_\varrho(a)} = \frac{A}{\rho!}, \tag{34}$$

azaz *a logaritmikus pólusok is vizsgálhatók a* MITTAG-LEFFLER-*féle ábrázolás kiválasztott formájával. Az ábrázoló egész függvény-sorozat* mihelyt $f_\varrho(a)$ függvényt ismerjük — s ezt kizárólag $E_\beta(a)$ határozza meg — *elárulja a kérdéses szingularitás logaritmikus és pólusos rendszámának összegét és kiszámítanunk engedi az A számbeli együtthatókat.* Ez az összefüggés az $E_\beta(a)$ összegező függvény határozott megválasztása folytán nem csupán teoretikusan, de gyakorlatilag is precziz, mert a $f_\varrho(a)$ függvények meghatározhatók s így növekedésük az $a^{q+\varrho}$ növekedéséhez adódva pontosan megadja $F(a, x)$-nek a határon való növekedését.

Algebrai pontok és logaritmikus algebrai pontok.

31. Az imént kiválasztott ábrázolás-forma megtartásával vizsgáljuk meg most függvényünket a csillagtartományból kizárt félegyenesek kezdőpontjában levő oly x_0 pontokban, hol

$$f(x) = \frac{A_r \log^q \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{x_0}}}{\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^r} + \varphi(x). \tag{B_1}$$

Ha $q=0$, r pedig tetszőleges valós pozitiv szám s $\varphi(x)$ rendje r-nél kisebb az x_0 pontban, az ily pontokat neveztük algebrai pontoknak s ha $q \neq 0$ x_0 pontot logaritmikus algebrai pontnak fogjuk nevezni. Megjegyezzük, hogy $(r, q-1)$, $(r, q-2)$ *stb. rendű addiiv tagok mindig hozzágondolhatók, de ez csak az írást komplikálja.*

Kezdjük a vizsgálatot az algebrai pontokkal. Minthogy r nem szükségkép egész szám, az összegezési formula

$$F(a, x_0) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0)\left[\frac{a}{\log(n+\beta)}\right]^n}{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{a}{\log(n+\beta)}\right]^n} \tag{C}$$

az eddig alkalmazott módszereknek ellentáll s kénytelenek vagyunk egész más oldalról fogni tárgyalásához, olyformán, mint azt a BOREL-féle exponencziális összeg vizsgálatánál tettük, mikor algebrai pontokról volt szó. Minthogy mostani formulánkban e^a szerepét $E_\beta(a)$ függvény tölti be, megkiséreljük, a 17. és 18. §§-ban foglaltakhoz hasonlóan, az $E_\beta(a)$ függvény növekedésének vizsgálatát, hogy az ez úton nyerendő eredményeket a szóban forgó szingularitások tanulmányozására kihasználhassuk.

32. Az $E(a)$ függvény növekedésének vizsgálata.

Legyenek adva

$$E(a) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^m}{(\log m)^m} \quad \text{és} \quad E_r(a) = \sum_{m=2}^{\infty} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m}$$

egész függvények. Be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{E_r(a)}{e^{ra}E(a)} = \frac{1}{e^r}. \tag{35}$$

Mindenekelőtt tudnunk kell, hogy $E(a)$-nak tagjai mily n indexig növekednek, mert módszerünket, a sor elejének és végének a növekedés vizsgálatából való kizárását, e nélkül nem alkalmazhatjuk. A maximális tag n indexére a sor általános tagjának differencziálásával a következő összefüggést nyerjük

$$\log a = \log\log n + \frac{1}{\log n},$$

azaz

$$a = \log n \, e^{\frac{1}{\log n}}.$$

mely összefüggés minden megadott a értékhez rendel egy n

számot, melyet közrefogó két egész számú közrül az egyik az azon a-val képezett numerikus sor maximális tagjának indexe azaz

$$n = f(a),$$

az a-nak egyelőre meg nem határozott folytonos függvénye. E függvény alaptulajdonságai:

$$\lim_{a=\infty} f(a) = \infty$$

és

$$f'(a) > 0,$$

ha a-nak elég nagy értéket adunk.

Az $E_r(a)$ függvény maximális tagjának indexéről n_1-ről kimutatjuk, hogy

$$\frac{n}{k} < n_1 < kn, \tag{36}$$

hol $k > 1$ és föltéve, hogy elég nagy a, illetve n számot választottunk.

Ugyanis az előbbi módon nyert egyenlet n_1-re nézve a következő:

$$\log a = \log\log n_1 + \frac{1}{\log n_1} - \frac{r}{n_1} = \varphi(n_1).$$

Látható, hogy elég nagy pozitiv értéket véve

$$\varphi'(x) > 0,$$

tehát a

$$\varphi(x_1) < \varphi(x) < \varphi(x_2)$$

egyenlőtlenségekből következnek az

$$x_1 < x < x_2$$

egyenlőtlenségek. Tehát (36) bebizonyitására ki kell mutatnunk, hogy

$$\varphi\left(\frac{n}{k}\right) < \varphi(n_1) < \varphi(kn). \tag{37}$$

Vizsgáljuk például a második egyenlőtlenséget. Be kell bizonyitnunk, hogy elég nagy a, illetve n értékre

$$\varphi(n_1) = \log a = \log\log n + \frac{1}{\log n} < \log\log kn + \frac{1}{\log kn} - \frac{r}{kn},$$

azaz, hogy

$$\log\left(1+\frac{\log k}{\log n}\right)-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log kn}-\frac{r}{kn}>0.$$

Azonban könnyű belátni, hogy

$$\lim_{n=\infty}\log^2 n\left[\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log kn}\right]=\log k$$

és hogy

$$\lim_{n=\infty}\log n\log\left[1+\frac{\log k}{\log n}\right]=\log k.$$

Bebizonyítandó egyenlőtlenségünk ez alapon tehát a következő

$$\frac{1}{\log n}\left[\log k+\varepsilon(n)-\frac{\log k+\eta(n)}{\log n}-\frac{r\log n}{kn}\right]>0,$$

hol a zárójelben levő mennyiség határértéke $\log k$ lévén, az egyenlőtlenség evidens. Ugyanily okoskodással bebizonyítható a (37) egyenlőtlenség első része is és ennek alapján a kivánt, (36) alatti, két egyenlőtlenség is bizonyos.

33. Jegyezzük még meg az alábbiak érdekében, hogy a

$$\lim_{n=\infty} g(n)=a$$

föltételből következik a

$$\lim_{a=\infty} g[f(a)]=a$$

egyenlőség is mindannyiszor, midőn az

$$\lim_{a=\infty} f(a)=\infty$$

egyenlőség és az

$$f'(a)>0$$

egyenlőtlenség elég nagy a-ra nézve, már igaz.

34. Vezessük be most a következő jelöléseket:

$$A(a)=\sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1}\frac{a^m}{(\log m)^m},\quad C(a)=\sum_{m=\frac{n}{k}}^{kn}\frac{a^m}{(\log m)^m},$$

$$B(a)=\sum_{m=kn+1}^{\infty}\frac{a^m}{(\log m)^m}$$

és

$$A_r(a) = \sum_{m=2}^{\frac{n}{k}-1} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m}, \quad C_r(a) = \sum_{m=\frac{n}{k}}^{kn} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m},$$

$$B_r(a) = \sum_{m=kn+1}^{\infty} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m},$$

s állani fog a következő két egyenlőtlenség:

$$A(a) + \left(\frac{n}{k}\right)^r C(a) + (kn)^r B(a) < E_r(a) <$$

$$< \left(\frac{n}{k}\right)^r A(a) + (kn)^r C(a) + B_r(a),$$

azaz

$$\frac{A(a)}{e^{ra}E(a)} + \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r}{e^{ra}} \cdot \frac{C(a)}{E(a)} + \frac{(kn)^r}{e^{ra}} \frac{B(a)}{E(a)} <$$

$$< \frac{E_r(a)}{e^{ra}E(a)} < \frac{\left(\frac{n}{k}\right)^r}{e^{ra}} \cdot \frac{A(a)}{E(a)} + \frac{(kn)^r}{e^{ra}} \cdot \frac{C(a)}{E(a)} + \frac{B_r(a)}{e^{ra}E(a)}, \tag{38}$$

hol

$$n = f(a).$$

Bizonyítsuk be legelőször, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n^{e^{\frac{1}{\log n}}}} = \frac{1}{e}, \tag{39}$$

mert ebből a 33. §. alapján

$$\lim_{a=\infty} \frac{[f(a)]^r}{e^{r.a}} = \frac{1}{e^r}. \tag{39'}$$

A (39) alatti egyenlőség igaz, mert

$$\frac{n}{n^{e^{\frac{1}{\log n}}}} = e^{\log n - e^{\frac{1}{\log n}} \log n} = e^{\log n \, [1 - e^{\frac{1}{\log n}}]}$$

és l'Hospital szabálya szerint e kitevője

$$\lim_{n=\infty} \frac{1-e^{\frac{1}{\log n}}}{\frac{1}{\log n}} = \lim_{n=\infty} \frac{-e^{\frac{1}{\log n}}\left(\frac{1}{\log n}\right)'}{\left(\frac{1}{\log n}\right)'} = \lim_{n=\infty} -e^{\frac{1}{\log n}} = -1$$

és ezt kellett bebizonyítanunk.

35. Most igazolni fogjuk, hogy a (38) alatti egyenlőtlenségben az első és utolsó tagok $a=\infty$ esetben zérus felé tartanak. E czélból be kell bizonyítani, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{A(a)}{E(a)} = 0 \tag{40}$$

és

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r(a)}{E(a)} = 0, \tag{41}$$

melynek ezáltal $r=0$ speczialis esete is bizonyítva van. Ha kimutatjuk, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{A(a)}{M(a)} = 0,$$

hol $M(a)$ az $E(a)$ maximális tagja, akkor már (40) is ki van mutatva, mert $E(a)$ együtthatói pozitivok lévén

$$M(a) < E(a).$$

Azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{A(\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}})}{M(\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}})} = \lim_{n=\infty} D_{(n)} = 0, \tag{42}$$

mert ebből a fentebbi megjegyzés szerint következik, hogy

$$\lim_{a=\infty} D[f(a)] = \lim_{a=\infty} \frac{A(a)}{M(a)} = 0.$$

Vizsgáljuk meg tehát a $D(n)$ függvényt. Minthogy $D(n)$ számlálójának utolsó tagja a legnagyobb, tehát

$$D(n) < \frac{\frac{n}{k} e^{\frac{n}{k \log n}} \log^{\frac{n}{k}} n}{\log^{\frac{n}{k}} \frac{n}{k}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{n}{\log n}}},$$

mert $E(a)$ maximális tagja

$$\frac{a^n}{(\log n)^n} = \frac{(\log n)^n e^{\overline{\log n}}}{(\log n)^n} = e^{\frac{n}{\log n}};$$

így tehát

$$D(n) < e^{\frac{n}{k} \operatorname{loglog} n + \frac{n}{k \log n} - \frac{n}{k} \operatorname{loglog} \frac{n}{k} - \frac{n}{\log n} + \log \frac{n}{k}}.$$

A kitevő harmadik tagját másképp írva

$$-\frac{n}{k} \log(\log n - \log k) = -\frac{n}{k}\left\{\operatorname{loglog} n + \log\left[1 - \frac{\log k}{\log n}\right]\right\}$$

s így a kitevő első tagja elesik. Továbbá

$$\lim_{n=\infty} \log n \,.\, \log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) = -\log k, \tag{43}$$

úgy hogy

$$\log\left(1 - \frac{\log k}{\log n}\right) = -\frac{\log k}{\log n} + \frac{\varepsilon(n)}{\log n},$$

tehát

$$D(n) < e^{\frac{n}{\log n}\left[\frac{1}{k} + \frac{\log k}{k} - 1 - \frac{\varepsilon(n)}{k}\right]},$$

hol n kitevő utolsó, jelentéktelen tagját beolvasztottuk $E(n)$ kifejezésbe.

Könnyű belátni, hogy $k > 1$ esetben

$$\frac{1}{k} + \frac{\log k}{k} - 1 < 0, \tag{44}$$

vagyis $\frac{n}{\log n}$ szorzója negativ s ennek alapján

$$\lim_{n=\infty} D(n) = 0.$$

Ugyanis a (44) egyenlőtlenség fennáll, mert

$$1 + \log k - k = \varphi(k) < 0$$

s ez evidens, ha meggondoljuk, hogy

$$\varphi'(k) = \frac{1}{k} - 1 < 0,$$

vagyis φ fogy a választott k értékekre és $\varphi(1) = 0$.

Ezek alapján kimondhatjuk, hogy a (40) egyenlőség igaz és ez azt jelenti, hogy *az* $E(a)$ *függvény növekedésére első, az* $\frac{n}{k}$ *számot meg nem haladó indexszel biró tagjai nem folynak be, mert hányadosuk* $E(a)$*-val a határon zérust ad.*

36. Ugyanezt kell most kimutatnunk a sor végére $B(a)$-ra vonatkozólag is.

Először is tudjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{kn}{[\log kn)]^{\frac{\log kn}{r}}} = 0,$$

ha tehát n-nel elég messze megyünk,

$$\frac{(kn)^r}{[\log (kn)]^{\log kn}} < 1$$

s ennek alapján

$$B_r(a) < \frac{a^{kn}}{[\log kn]^{kn - \log kn}} + \frac{a^{kn+1}}{[\log (kn+1)]^{kn+1-\log (kn+1)}} + \cdots \quad (45)$$

Hogy ennek az $E(a)$ függvényhez viszonyított nagyságrendjét megitélhessük, lássuk be előbb, hogy az

$$\frac{a^x}{(\log x)^{x - \log x}} \quad (46)$$

alakú kifejezések elérik maximális értéküket valamely $x < kn$ értéknél, hol n mint a-nak fentebb meghatározott $n = f(a)$ függvénye gondolandó. E maximális értéket szolgáltató egyenlőség

$$\log a = \operatorname{loglog} x + \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x}[1 + \operatorname{loglog} x] = h(x)$$

és minden $x > e$ értékre nézve

$$h'(x) > 0,$$

ha tehát bebizonyitjuk, hogy

$$h(kn) > \log a,$$

akkor bebizonyítottuk azt is, hogy a (46) kifejezést maximummá tevő

$$x < kn.$$

Bizonyítsuk be tehát, hogy

$$h(kn) > \log a = \log\log n + \frac{1}{\log n},$$

azaz

$$\log\log(kn) + \frac{1}{\log(kn)} - \frac{1}{kn}[1 + \log kn] > \log\log n + \frac{1}{\log n} \quad (47)$$

vagy ezt másképp írva

$$\log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) + \frac{1}{\log n}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\log k}{\log n}}\right] - \frac{1}{kn}[1 + \log\log kn] > 0$$

azonban tekintettel a (43) és a

$$\lim_{a=\infty} \log n \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\log k}{\log n}}\right] = \log k$$

egyenlőségre, a (47) egyenlőtlenség igaz volta evidens.

37. Tehát a $B_r(a)$ helyett használt (45) alatti végtelen sor első tagja a legnagyobb. Nagyítsuk most ezt a kifejezést olyformán, hogy az $e^{\log^2 n}$ indexig menő tagjai helyett írjuk bele az első tagnak $e^{\log^2 n}$-nel való szorzatát. Az $e^{\log^2 n}$ szám nagyobb, mint az elhagyott tagok száma.

Bizonyítsuk be végre, hogy az $e^{\log^2 n}$-nél nagyobb indexszel biró tagok összege már magában zérus felé tart, ha a-val a ∞ felé megyünk.

Ugyanis válaszszunk például egy $\varepsilon = \frac{1}{4}$ számot, akkor az

$$\frac{a}{(\log \nu)^{1-\frac{\log \nu}{\nu}}} < \frac{a}{(\log \nu)^{1-\varepsilon}}$$

egyenlőtlenség igazolva van minden $\nu \geqq e^4$ számra nézve.

Másrészt

$$[\log(\nu+m)]^{(\nu+m)\left[1-\frac{\log(\nu+m)}{\nu+m}\right]} > (\log\nu)^{(\nu+m)(1-\varepsilon)}.$$

E két egyenlőtlenségből azt a hasznos eredményt nyerjük, hogy $B_r(a)$ tagjai helyett oly náluknál nagyobb mennyiséget használhatunk, melyben m csak kitevőként szerepel. Azaz $B_r(a)$ sorának ν indexű tagjait c_ν-vel jelölve

$$c_{\nu+m} < \left(\frac{a}{(\log\nu)^{1-\varepsilon}}\right)^\nu \cdot \left(\frac{a}{(\log\nu)^{1-\varepsilon}}\right)^m.$$

Írjuk ν helyébe az $e^{\log^2 n}$ értéket, akkor

$$\lim_{n=\infty} \frac{a}{(\log^2 n)^{1-\varepsilon}} = \lim_{n=\infty} \frac{\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}}}{\log n} \cdot \frac{\log^{2\varepsilon} n}{\log n} = 0.$$

Tehát $B_r(a)$ végtelen sorának az $e^{\log^2 n}$ indexű tagon túli része

$$s_{e^{\log^2 n}} = c_\nu + c_{\nu+1} + \cdots + c_{\nu+m} + \cdots <$$

$$< \left(\frac{a}{(\log^2 n)^{1-\varepsilon}}\right)^{e^{\log^2 n}} \left[1 + \frac{a}{(\log^2 n)^{1-\varepsilon}} + \cdots\right],$$

azaz

$$s_{e^{\log^2 n}} < \left[\frac{a}{(\log^2 n)^{1-\varepsilon}}\right]^{e^{\log^2 n}} \frac{1}{1 - \dfrac{a}{(\log^2 n)^{1-\varepsilon}}}$$

s ezzel azt mondottuk ki, hogy

$$\lim_{n=\infty} s_{e^{\log^2 n}} = 0 \tag{48}$$

a mint azt bizonyítani akartuk.

Írhatjuk tehát, hogy

$$B_r(a) < e^{\log^2 n} \frac{a^{kn}}{[\log kn]^{kn-\log kn}} + s_{e^{\log^2 n}}$$

s így annak bebizonyítása, hogy

$$\lim_{a=\infty} \frac{B_r(a)}{E(a)} = \lim_{n=\infty} \frac{B_r(\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}})}{E(\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}})} = 0$$

annak bebizonyítására redukálódik, hogy

$$\lim_{n=\infty} e^{\log^2 n} \frac{a^{kn}}{(\log kn)^{kn-\log kn} \cdot e^{\frac{n}{\log n}}} = 0, \tag{49}$$

mert $e^{\frac{n}{\log n}}$ az $E(\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}})$ sorában a maximális tag lévén,

$$e^{\frac{n}{\log n}} < E(\log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}}),$$

s hol mindenütt tekintetbe vettük, hogy $a = \log n \,.\, e^{\frac{1}{\log n}}$. A (49) egyenlőséget máskép írva, azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$\lim_{n=\infty} e^{\log^2 n + kn \operatorname{loglog} n + \frac{kn}{\log n} - [kn - \log kn] \operatorname{loglog} kn - \frac{n}{\log n}} = 0.$$

Ez exponens első negativ tagját még így írhatjuk,

$$-kn \log\log n - kn \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) + \log kn \,.\, \operatorname{loglog} kn$$

s e kifejezés első tagja e kitevőjének első tagjával zérus összeget ad. Továbbá tudjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \log n \,.\, \log\left(1 + \frac{\log k}{\log n}\right) = \log k,$$

tehát a kitevő nagyságrendje $\frac{n}{\log n}$ s az egész kitevő így írható

$$\frac{n}{\log n}[c + \varepsilon(n)],$$

hol

$$c = k - k\log k - 1 < 0,$$

mint azt a 18. §-ban már bebizonyítottuk. Tehát e kitevője negativ s a keresett határérték tényleg zérus, a mi azt jelenti, hogy *az* $E_r(a)$ *s így a* $E(a)$ *függvény növekedésére sorának vége sincs befolyással.*

Ez egyértelmű azzal, hogy *a sor közepe* $C(a)$ *adja meg* $E(a)$ *növekedését,* azaz

$$\lim_{a=\infty} \frac{C(a)}{E(a)} = \frac{E(a)-A(a)-B(a)}{E(a)} = 1. \tag{50}$$

38. E bevezető számítások után térjünk vissza (38) alatti egyenlőtlenségeinkre. Eddigi eredményeinkből a (39)' tekintetbe vételével következik, hogy

$$\liminf_{a=\infty} \frac{E_r(a)}{e^{r \cdot a} E(a)} \geqq \frac{1}{e^r k^r}$$

és

$$\limsup_{a=\infty} \frac{E_r(a)}{e^{r \cdot a} E(a)} \leqq \frac{k^r}{r^r}$$

azonban minthogy ez minden $k>1$ számra igaz, a 20. §. végén már részletezett okoskodás szerint

$$\lim_{a=\infty} \frac{E_r(a)}{e^{ra} E(a)} = \frac{1}{e^r} \tag{35}$$

és ezt akartuk bebizonyítani.

És most visszatérhetünk (B_1) alatti függvényünkre, melyet a (C) formával reprezentáltunk s mely az x_0 pontban (B_1) alakú.

Minthogy $\varphi(x)$ rendje $<r$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

alakban írható, hol $\varphi_1(x)$ szabályos az $|x_0|$ sugarú kör belsejében és rendje az egész körön kisebb, mint r, $\varphi_2(x)$ pedig a $0-x_0$ egyenesen holomorf, beleértve az egyenes végpontját is. Tehát

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{\varphi_1}(x_0)}{n^r} = 0. \tag{51}$$

Írjuk fel most Mittag-Leffler tételét a

$$\varphi_2(x) = f(x) - \frac{B_r}{\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^r} - \varphi_1(x)$$

függvényre nézve.

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_n - A_r B_n^{(r+1)} - s_n^{\varphi_1}) a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \varphi_2(x_0),$$

tehát

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_n - A_r B_n^{(r+1)} - s_n^{\varphi_1}) a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = 0.$$

Másrészt

$$\lim_{a=\infty} \frac{\left| \sum_{n=0}^{\infty} s_n^{\varphi_1} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n} \right|}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} \leqq \lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} |s_n^{\varphi_1}| \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{s_n^{\varphi_1}}{n^r} = 0,$$

azaz, (35) tekintetbe vételével,

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{\varphi_1} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ra} E(a)} = 0$$

és

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \lim_{a=\infty} \frac{B_n^{(r+1)}}{n^r} = \frac{1}{\Gamma(r+1)},$$

azaz

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r+1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+\beta}}}{e^{ra} E(a)} = \frac{e^{-r}}{\Gamma(r+1)}.$$

Tehát

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar}E(a)} = \frac{e^{-r}B_r}{\Gamma(r+1)}.$$

Azonban

$$\lim_{a=\infty} \frac{E(a)}{E_\beta(a)} = 1,$$

mert

$$\lim_{a=\infty} \left[\frac{\log(n+\beta)}{\log n}\right]^n = 1,$$

tehát végül

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{ar}E_\beta(a)} = \frac{e^{-r}B_r}{\Gamma(r+1)}$$

vagy a sorozatra térve át

$$\lim_{a=\infty} \frac{F(a, x_0)}{e^{ar}} = \frac{e^{-r}.B_r}{\Gamma(r+1)}, \tag{52}$$

vagyis *az algebrai pont végtelenségi foka az exponencziális függvény révén árulja el magát. Ezzel az utolsó egyenlőségünkkel az előbbiekkel analog összefüggést mondtunk ki a csillagtartomány mindazon algebrai pontjaira, melyek a kizárt félegyenesek kezdőpontjában vannak.* A vizsgált szingularitás fekvésére vonatkozó e követelmény a kérdés természetéből származik, mert a szinguláris rész levonása után maradó, függvény csillagtartományába x_0-nak már bele kell esnie s ez nem történhetik meg, ha a vizsgálandó szinguláris pont a kizárt vonalaknak nem kezdő, hanem valamely messzebbi pontjában van.

39. A logaritmikus pontok s a logaritmikus algebrai pontok vizsgálata érdekében hasonló módon kell tanulmányoznunk az

$$E_q(a) = \sum_{n=2}^{\infty} \log^q m \frac{a^m}{(\log m)^m}$$

és az

$$E_{r,q}(a) = \sum_{n=1}^{\infty} m^r \log^q m \frac{a^m}{(\log m)^m}$$

függvényeket. *Ezekre vonatkozólag is keresztülvihetők mindama számítások, melyeket az*

$$E_r(a) = \sum_{n=2}^{\infty} m^r \frac{a^m}{(\log m)^m}$$

függvényen végeztünk, sőt az m^r *vagy* $(\log m)^q$ *függvénynél összetettebb kifejezések is szerepelhetnek ezek helyén* a nélkül, hogy az általuk képezett $E_x(a)$ függvényre vonatkozólag megszünnék amaz állítás igazsága, hogy nagyságrendjére nem foly be sorának «eleje» és «vége». Ebben az irányban a vizsgálatok komplikáltabb szerkezetű szingularitásokra is kiterjeszthetők volnának az egész függvényekre vonatkozó megfelelő vizsgálatok segélyével. Az egész függvények növekedésének ilyenfajta egész sorainak tanulmányozását későbbre tartjuk fenn magunknak, mert ezek főérdeke épen az egész függvényekre s nem az analitikai függvények szingularitására esik.

Itt ez önmagukban is érdekes általános összefüggéseknek csak kijelentésére szorítkozunk s rövid bizonyítását adjuk a

$$\lim_{a=\infty} \frac{E_q(a)}{e^a E(a)} = 1 \tag{53}$$

és

$$\lim_{a+\infty} \frac{E_{r,q}(a)}{e^{ra} a^q E(a)} = \frac{1}{e^r} \tag{54}$$

egyenlőségeknek.

Ezen általános eredményektől függetlenül s egyrészt az $E(a($ függvény természetéből folyólag, másrészt az $E_r(a)$ függvényre vonatkozólag találtak alapján rövid meggondolás útján juthatunk a logaritmikus algebrai pontokat illető eredményekhez. Ugyanis

$$E_{r,q}(a) = \sum_{n=2}^{\infty} m^r \frac{a^m}{(\log m)^{m-q}} = P_{q-1}(a) + a^q \sum_{m=q}^{\infty} m^r \frac{a^{m-q}}{(\log m)^{m-q}}.$$

Minthogy azonban

$$\lim_{m=\infty} \left(\frac{m}{m-q}\right)^r$$

és

$$\lim_{m=\infty}\left[\frac{\log(m-q)}{\log m}\right]^{m-q}=1,$$

tehát $E_{r,q}$ ép úgy nő, mint

$$E'_{r,q}(a)=P_{q-1}(a)+a^q\sum_{m=2}^{\infty} m^r\frac{a^m}{(\log m)^m},$$

azaz növekedésbelileg

$$E_{r,q}(a)=a^q\,.\,E_r(a).$$

Így az $E_r(a)$-ra talált összefüggésből

$$\lim_{a=\infty}\frac{E_{r,q}(a)}{a^q e^{r.a}E(a)}=\frac{1}{e^r}.$$

40. Alkalmazzuk most ezt az eredményt oly x_0 pontok vizsgálatára, hol

$$f(x)=A_r\frac{\log^q\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^r}+\varphi(x),$$

hol $\varphi(x)$ ismét két részre bontva (51) szerint

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n^{(\varphi_1)}}{n^r}=0.$$

Írjuk fel most a Mittag-Leffler-féle ábrázolást a $\varphi_2(x)$ függvényre, mely

$$\varphi_2(x)=f(x)-A_r\frac{\log^q\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x_0}}}{\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)^r}-\varphi_1(x).$$

Ez ábrázolás szerint

$$\lim_{a=\infty}\frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s_n-A_r s_n^{(r,q)}-s_n^{(\varphi_1)})\,a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+}}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+}}}=\varphi_2(x_0)$$

és $\varphi_2(x)$ az x_0 pontban holomorf lévén

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s_n - A_r s_n^{(r,q)} - s_n^{(\varphi_1)})\, a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+}}}{e^{ar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+}}} = 0.$$

A $\varphi_1(x)$ függvényre vonatkozólag mint előbb

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{(\varphi_1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+}}}{\sum_{n=0}^{\infty} n^r \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^{n+}}} = 0,$$

azaz

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} s_n^{(\varphi_1)} \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{e^{r.a} E(a)} = 0.$$

Írjuk fel végül a

$$\frac{\log^q \frac{1}{1 - \frac{x}{x_0}}}{\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^r}$$

függvény ábrázolását. Ez annyi, mint

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{r,q}(x_0) \frac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{E(a)}.$$

Minthogy azonban (8) alatti eredményünk szerint

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n^{(r,q)}}{n^r \log^q n} = \frac{1}{\Gamma(r+1)},$$

tehát

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n^{r,q}(x_0) \dfrac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{\sum\limits_{n=2}^{\infty} n^r \log^q n \cdot \dfrac{a^n}{[\log(n+\beta)]^n}} = \frac{1}{\Gamma(r+1)}$$

és így (54) felhasználásával

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=2}^{\infty} s_n^{(r,q)}(x_0) \dfrac{a^n}{(\log n)^n}}{a^q \,.\, e^{ra} E(a)} = \frac{e^{-r}}{\Gamma(r+1)}.$$

Ebből közvetlenül következik végső eredményünk:

$$\lim_{a=\infty} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{s_n(x_0)\, a^n}{[\log(n+\beta)]^n}}{a^q e^{ar} E(a)} = \frac{A_r e^{-r}}{\Gamma(r+1)}$$

vagy visszatérve eredeti egész függvény-sorozatunkra

$$\lim_{a=\infty} \frac{F(a, x_0)}{a^q e^{ar}} = \frac{A_r e^{-r}}{\Gamma(r+1)},$$

azaz *a logaritmikus algebrai pontokban is jellemezhetjük a* MITTAG-LEFFLER-*féle egész függvényes ábrázolással a függvény viselkedését.*

Látjuk tehát, hogy *a logaritmus minden hatványa a-nak egy hatványával, a pólus vagy algebrai pont pedig e^a-nak megfelelő hatványával növeli a reprezentáló egész függvény növekedését.*

E tételek véges számszor való alkalmazásával teljesen megvizsgálhatjuk a függvényt minden oly pólusban, algebrai pontban, logaritmikus pontban, logaritmikus pólusban és logaritmikus algebrai pontban, mely a csillagtartomány kizárt félegyeneseinek kezdőpontjába esik. Hangsúlyozzuk, hogy a vizsgált szingularitásoknak nem kell szükségképen tisztán mutatkozniok. Láttuk ugyanis, hogy a $\varphi(x)$ függvénynek, mely a vizsgált szingularitás levonása után marad fenn, igen komplikált szingularitásai is lehetnek az x_0 helyen, sőt x_0 egész szinguláris vonal belsejében is lehet a nélkül, hogy tételeink érvényessége megszünnék, mert módszereink e $\varphi(x)$ szingularitásaira nézve egyéb kikötést nem tartalmaznak, mint azt, hogy e függvény HADAMARD értelmezése szerinti «rendje» azon x_0 pontban kisebb legyen, mint az elnevezés alapjául felvett szingularitásé, mely épen e legmagasabb rendjénél fogva dönti el a kérdéses pontban a függvény viselkedését.

A jelen dolgozatban tehát a bevezetésben felsorolt szingularitásokra vonatkozólag teljesen megoldottuk a II. rész elején kitűzött általános problémát. A felhasznált hosszadalmas számítások, melyekbe az $E_\beta(a)$ függvény tulajdonságai kényszerítettek bennünket, némileg megtörik a gondolatmenet egységét s e miatt befejezésül utalunk a *Math. és Term. Értesítő*-*ben* megjelent dolgozatunkra, melyben e gondolatmenet számítások nélkül való összefoglalását adtuk s melyben annak egységét így jobban kidomboríthattuk.

Dienes Valéria és Dienes Pál.

A TERÜLETMÉRÉSRŐL.

(Harmadik és befejező közlemény.)

NEGYEDIK FEJEZET.

Az alulról folytonos függvényről. A rectifiabilis felület quadraturája.

1. *A függvény egyszerűbb tulajdonságai. a)* $\varphi(x)$ a $(0, a)$-ban definiált alulról folytonos függvényt jelentsen. Legyen (u, v) a $(0, a)$ egy intervalluma. Van legalább egy ξ pont az (u, v)-ben, a melyre

$$\varphi(\xi) = g^{\varphi}(u, v)$$

áll.

Ugyanis WEIERSTRASS egy ismert tétele szerint van az (u, v)-ben legalább egy oly ξ pont, a melynek bármily $(\xi-\varepsilon, \xi+\eta)$ az (u, v)-be eső közelségében is

$$g^{\varphi}(\xi-\varepsilon, \xi+\eta) = g^{\varphi}(u, v).$$

Azaz (l. III. fej. 1.)

$$\varphi(\xi) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\varphi}(\xi-\varepsilon, \xi+\eta)$$

miatt

$$\varphi(\xi) = g^{\varphi}(u, v).$$

b) Ha $L > g^{\varphi}(0, a)$ azon x értékek H halmaza, a melyekre $\varphi(x) \leqq L$ [1] zárt.

Mint ismeretes egy ponthalmazt akkor nevezünk zártnak, ha határpontjait is tartalmazza.

---

[1] E halmaz az *a)* alapján létező.

Legyen x' a H egy határpontja. Így bármily $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$-ban is van a H-nak pontja, azaz

$$g^{\varphi}(x'-\varepsilon, x'+\eta) \leqq L,$$

tehát

$$\varphi(x') = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\varphi}(x'-\varepsilon, x'+\eta) \leqq L,$$

azaz x' a H pontja s így H zárt.

c) Véges számú alulról folytonos függvény összege is alulról folytonos.

Legyenek például $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ a $(0, a)$-ban definiált alulról folytonos függvények. Így (l. III. fej. 1.) van az előre adott positiv δ-hoz s a $(0, a)$ bármely x' pontjához oly $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$, hogy pontjaira

$$\varphi(x')-\varphi(x) < \frac{\delta}{2},$$

$$\psi(x')-\psi(x) < \frac{\delta}{2}.$$

Így az $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$ pontjaira

$$[\varphi(x')+\psi(x')]-[\varphi(x)+\psi(x)] < \delta,$$

azaz (l. III. fej. 1.) $\varphi(x)+\psi(x)$ alulról folytonos.

2. *Normál sorozat. $\varphi(x)$ a $(0, a)$-ban definiált, nem negativ és határolt alulról folytonos függvényt jelentsen.*

Van olyan (elsőfajú és $\geqq \frac{1}{6}$ hányadosú) X_{l_r} sorozat, a melyre

$$\tfrac{1}{2}\,.\,X_{l_\infty}\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})\big)\,.\,(x_{i+1}-x_i) = \int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

Az ily X_{l_r} sorozatot a φ-hez normál sorozatnak nevezzük. E sorozat még olyan is lehet, hogy X_{l_1} egy előre adott, tetszőleges X_s beosztást tartalmaz.

Bizonyítás.

a) Jelölje c a $\varphi(x)$ összes értékeinek alsó d pedig ugyanez értékek felső határát. Legyen θ egy tetszőleges positiv szám.

Oszszuk a (c, d) intervallumot véges, k számú részre úgy, hogy e részek mindegyike θ-nál kisebb legyen. Legyenek

$$c = c_0 < c_1 < \cdots < c_h < c_{h+1} < \cdots < c_k = d$$

e részek szélei.

Jelölje φ_1 azon x pontok halmazát, a melyekre $\varphi(x) \leqq c_1$. Az 1. pont szerint φ_1 létező és zárt. Legyen terjedelme (lásd II. fej. 2.) d_1. Zárjuk a φ_1-et véges számú, egymástól elválasztott, a $(0, a)$-ba eső d'_1 nevű intervallumokba úgy, hogy ezek hosszainak összege, $d_1 + \varepsilon_1$ legyen. Ha $d_1 < a$, $\varepsilon_1 > 0$, $d_1 + \varepsilon_1 < a$ legyen és a d'_1-ek szélei a 0 és a pontok esetleges kivételével ne legyenek φ_1 pontjai.

Ha $d_1 < a$ jelölje φ_2 azon x pontok halmazát, a melyek nem esnek a d'_1 félék belsejébe, s a melyek közt nincs a 0 (a) pont, ha e pont egy d'_1 széle s a melyekre $\varphi(x) \leqq c_2$. E pontokra nyilván $\varphi(x) > c_1$. φ_2 nem létezik szükségkép, de ha létezik zárt, jelölje d_2 terjedelmét. Ha $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 < a$, zárjuk a φ_2-őt véges számú, egymástól elválasztott, a $(0, a)$-ba eső d'_2 nevű intervallumokba, a melyeknek a d'_1 félékkel legfeljebb a széleken van közös pontja, a szélek a $(0\ a,)$ és a d'_1-ek széleire esők kivételével ne legyenek φ_2 pontjai s a d'_2 félék hosszösszege $d_2 + \varepsilon_2$ $(\varepsilon_2 > 0)$ lévén, $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 < a$ legyen.

Ha φ_2 nem létezik a d'_2 félék úgy veendők fel, mintha φ_2 léteznék és $d_2 = 0$ volna.

Ha $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 < a$, jelölje φ_3 azon x értékek halmazát, a melyek azon intervallumokba esnek, a melyek a $(0, a)$-ból maradnak, ha belőle a d'_1 és d'_2 félék belső pontjai elvétetnek s a melyekre $\varphi(x) \leqq c_3$. E pontokra még nyilván $\varphi(x) > c_2$.

φ_3 se létezik szükségkép. De ha létezik zárt, jelölje terjedelmét d_3. Zárjuk be a $(0, a)$ felmaradt intervallumaiba eső d'_3 nevű, véges számú, egymástól elválasztott oly intervallumokba, a melyek széleire, ha csak lehet $\varphi(x) > c_3$ legyen.[1] Továbbá,

---

[1] Ha egy d'_3 széle a $(0, a)$ vagy d'_1, vagy d'_2 széle e szélre $\varphi(x) = c_3$ lehet.

ha $d_1+\varepsilon_1+d_2+\varepsilon_2+d_3<a$ a d_3' félék $d_3+\varepsilon_2$ $(\varepsilon_3>0)$ hosszösszegére $d_1+\varepsilon_1+d_2+\varepsilon_2+d_3+\varepsilon_3<a$ legyen.

Ha φ_3 nem létezik a d_3'-ek oly intervallumok legyenek, mintha φ_3 léteznék és $d_3=0$ volna.

Ezen eljárást folytatva, egy $p\leqq k$ egész számot nyerünk úgy, hogy ha $p=1$, $d_1=a$, míg ha $p>1$

$$(d_1+\varepsilon_1)+\cdots+(d_h+\varepsilon_h)+\cdots+(d_p+\varepsilon_{p-1})+d_p=a,$$
$$\varepsilon_1>0,\ldots,\varepsilon_h<0,\ldots,\varepsilon_{p-1}>0.$$

b) Jelölje $X_{l'}$ az X_s pontjaiból s a d_h' féle intervallumok $(h=1,\ldots,p)$ széleiből álló beosztást.

Képezzünk oly $X_{l''}\geqq\frac{1}{2}$ hányadosú beosztást, a mely az $X_{l'}$ pontjait tartalmazza.[1]

Vegyünk fel az $X_{l''}$ (x_2, x_3), $(x_4, x_5)\ldots(x_{2j}, x_{2j+1})\ldots(x_{2q}, x_{2q+1})$ (itt $2q+1$ a legnagyobb páratlan szám, a mely l''-nél kisebb) intervallumai mindenikében egy pontot, még pedig úgy, hogy ha az (x_{2j}, x_{2j+1}) az $X_{l'}$ pontját nem tartalmazza e pontra $\varphi(x)$ értéke $g^{\varphi}(x_{2j}, x_{2j+1})$ legyen, ha pedig (x_{2j}, x_{2j+1}) az $X_{l'}$ pontját tartalmazza (e pont vagy x_{2j} vagy x_{2j+1}), úgy a felvett pont az $X_{l'}$ pontja legyen.

A felvett pontok (s a 0 és a) által képezett beosztás jele X_l legyen. E beosztás hányadosa nyilván $\geqq\dfrac{1}{6}$.

Képezzük az

$$(l)=\tfrac{1}{2}\cdot X_l\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})\big)\cdot(x_{i+1}-x_i)=\tfrac{1}{2}\cdot X_l\,\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})$$
$$(x_{-1}=0,\quad x_{l+1}=a)$$

értéket.

Állítom, hogy (l) nem nagyobb, mint

---

1 Oszszuk a $(0, a)$ intervallumot annyi egyenlő részre, hogy az $X_{l'}$ kétkét szomszédos pontja közé legalább is 10 egyenlő rész essék. $X_{l''}$ osztópontjai lesznek: $X_{l'}$ osztópontjai, s az egyenlő részek szélei közül azok, a melyek nem szélei egy oly egyenlő résznek se, a melyben $X_{l'}$-nek pontja van.

$$(1) = [c_1 \, . \, (d_1+\varepsilon_1)+\cdots+c_h \, . \, (d_h+\varepsilon_h)+\cdots+c_{p-1} \, . \, (d_{p-1}+\varepsilon_{p-1})+$$
$$+c_p \, . \, d_p]+48 \, . \, d \, . \, (\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_h+\cdots+\varepsilon_{p-1})+(l'+1) \, . \, d \, . \, \frac{24 \, . \, a}{l''} \, .$$

$\frac{1}{2} \, . \, \varphi(x_i) \, . \, (x_{i+1}-x_{i-1})$ úgy tekinthető, mint az x_i pontnak az (l)-hez való járuléka.

Az x_i pont kétféle lehet. 1. nem pontja az $X_{l'}$-nek. 2. pontja az $X_{l'}$-nek.

Tekintsük ez 1. és 2. féle pontok járulékait.

Az 1. féle pontok. E pontok egy-egy d'_h féle intervallum belsejébe esnek. Ha ez x_i a d'_h-ba esik vagy *a)* $\varphi(x_i) \leq c_h$ vagy *b)* $\varphi(x_i) > c_h$.

Tekintsük az *a)* féle pontok járulékainak összegét.

Ha minden a d'_h ($h =$ const.) félébe eső 1. alatti x_i-re $\varphi(x) \leqq c_h$ volna, úgy e pontokra vonatkozó járulékok összege $< c_h \, . \, (d_h+\varepsilon_h)$, illetve a $h = p$ esetben $< c_p \, . \, d_p$ volna.[1] Így $h=1, 2, \ldots, p$ véve az 1. *a)* féle pontok járulékainak az összege nem nagyobb, mint az (1) első tagja.

Tekintsük a *b)* féle pontok járulékainak az összegét.

E *b)* féle pontok nyilván az $X_{l''}$ oly (x_{2j}, x_{2j+1}) intervallumainak pontjai, a melyek egy d'_h-ba esvén olyanok, hogy

$$g^{\varphi}(x_{2j}, x_{2j+1}) > c_h.$$

Így (x_{2j}, x_{2j+1})-ben φ_h-nak pontja nem lehet (φ_h pontjaira $\varphi(x) \leqq c_h$), továbbá ily (x_{2j}, x_{2j+1}) d'_p-be nem eshet.

Jelölje e_h az $X_{l''}$-nek, azon a d'_h ($h =$ const.$< p$) intervallumokba eső intervallumainak a számát, a melyekben nem lehet a $\varphi(x_i) \leqq c_h$ feltételnek eleget tevő pontot találni, azaz a melyekben φ_h-nak pontja nincs.

Ezen intervallumok hosszösszege így $\leqq \varepsilon_h$, mert a d'_h félék hosszösszege $d_h+\varepsilon_h$ és φ_h terjedelme d_h. (Lásd II. fej. 2.)

[1] $\frac{1}{2} \, . \, \varphi(x_i) \, . \, (x_{i+1}-x_{i-1})$ egy oly trapez területe, a melynek egy nem parallel oldala az (x_i, x_{i+1}) intervallum, parallel oldalai pedig az y tengelylyel parallelek és $\varphi(x_i)$, illetve $\varphi(x_{i+1})$ hosszaságúak. Tekintetbe véve, hogy d'_h szélei nem valók az 1 féle pontokhoz s hogy e szélek X_l pontjai a szöveg állításának a helyessége könnyen szerkeszthető ábra segélyével nyilvánvaló.

$X_{l''}$ legkisebb intervallumának a hossza $> \frac{a}{2 \,.\, l''}$.[1]

Így

$$e_h \cdot \frac{a}{2l''} \leqq \varepsilon_h,$$

$$e^h \leqq \frac{2 \,.\, \varepsilon_h \,.\, l''}{a}.$$

X_l legnagyobb intervallumának a hossza $< \frac{24 \,.\, a}{l''}$.[2] Továbbá $\varphi(x) \leqq d$. Így a d'_h félékbe ($h = \text{const.} < p$) eső 1. *b)* féle pontok járulékainak összege

$$\leqq d \cdot \frac{2 \,.\, \varepsilon_h \,.\, l''}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{24 \,.\, a}{l''} + \frac{24 \,.\, a}{l''} \right) = 48 \,.\, d \,.\, \varepsilon_h.$$

$h = 1, 2, \ldots, p-1$-re összegezve az 1. *b)* féle pontok járulékainak az összege nyilván nem nagyobb, mint az (1) második tagja. Végül az $X_{l'}$ pontjainak a száma $(l'+1)$, $\varphi(x) \leqq d$, X_l legnagyobb intervallumának a hossza $\leqq \frac{24 \,.\, a}{l''}$, tehát e pontok járulékainak az összege

$$\leqq d \,.\, (l'+1) \cdot \frac{24 \,.\, a}{l''}$$

és ez az (1) harmadik tagja.

Azaz $(l) \leqq (1)$.

---

[1] Legyen u egy X_p beosztás hányadosa. x_- és x_+ jelöljék a beosztás legkisebb, illetve legnagyobb intervallumának a hosszát. Áll, hogy

$$x_- + (p-1) \,.\, \frac{x_-}{u} \geqq a, \quad x_+ + (p-1) \,.\, x_+ \,.\, u \leqq a,$$

s így

$$x_- \geqq \frac{a}{1 + \frac{p-1}{u}}, \quad x_+ \leqq \frac{a}{1 + (p-1) \,.\, u},$$

$u = \frac{1}{2}$, $p = l''$-re a szöveg állítása következik.

[2] Az elébbi jegyzet szerint e hosszúság $< \frac{6a}{l+5} < \frac{6a}{l}$ és nyilván $\frac{l}{l''} > \frac{1}{4}$.

c) Az alsó integrál definitiójából (II. fej. 2.) következik, hogy

$$(2) = c_0 \,.\, d_1 + \cdots + c_{h-1} \,.\, d_h + \cdots + c_{p-1} \,.\, d_p \leqq \underline{\int_0^a} \varphi(x) \,.\, dx.$$

Így

$$(l) \leqq (1) + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\, dx - (2) = \underline{\int_0^a} \varphi(x)\, dx + (1) - (2).$$

Legyen $\lambda > 0$. Állítom, hogy (a nyilván nem negativ) (1)—(2) a θ, k s a $d'_1, \ldots, d'_h, \ldots, d'_p$ kellő választása által $< \lambda$ lehet. Ugyanis

$$(1)-(2) = (c_1 - c_0) \,.\, d_1 + \cdots + (c_{h+1} - c_h) \,.\, d_h + \cdots + (c_p - c_{p-1}) \,.\, d_p +$$
$$+ c_1 \,.\, \varepsilon_1 + \cdots + c_h \,.\, \varepsilon_h + \cdots + c_{p-1} \,.\, \varepsilon_{p-1} +$$
$$+ 48 \,.\, d \,.\, (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_h + \cdots + \varepsilon_{p-1}) + (l'+1) \,.\, d \cdot \frac{24 \,.\, a}{l''} \cdot$$

Továbbá

$$c_{h+1} - c_h < \theta, \quad d_1 + \cdots + d_h + \cdots + d_p \leqq a, \quad c_h \leqq d.$$

Azaz

$$(1)-(2) < a \,.\, \theta + 49 \,.\, d \,.\, (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_h + \cdots + \varepsilon_{p-1}) +$$
$$+ (l'+1) \,.\, d \cdot \frac{24 \,.\, a}{l''} = (3).$$

Ha tehát $\theta < \frac{\lambda}{3a}$, k tetszőleges, de $> \frac{d-c}{\frac{\lambda}{3a}}$ s a $d'_1, d'_2, \ldots$ úgy képeztetnek, hogy $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ kisebbek, mint $\frac{\lambda}{3 \,.\, 49 \,.\, d \,.\, k}$, $X_{l'}$ meghatározott lesz. $X_{l''}$ nyilván vehető fel úgy, hogy

$$(l'+1) \,.\, d \cdot \frac{24 \,.\, a}{l''} < \frac{\lambda}{3} \cdot$$

Így $(3) < \lambda$, azaz $(1)-(2) < \lambda$.

d) Ekként

$$\tfrac{1}{2} \,.\, X_l\big(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})\big) \,.\, (x_{i+1} - x_i) < \underline{\int_0^a} \varphi(x) \,.\, dx + \lambda.$$

X_s helyébe $X_l \equiv X_{l_1}$, λ helyébe $\frac{\lambda}{2}$ véve s az eljárást folytatva, nyilván nyerünk egy X_{l_r} sorozatot, a mely $\geqq \frac{1}{6}$ arányú úgy, hogy

$$\tfrac{1}{2} \cdot X_{l_r}\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})\big) \cdot (x_{i+1}-x_i) < \int_0^a \varphi(x) \cdot dx + \frac{\lambda}{2^{r-1}},$$

és még X_{l_1} az X_s beosztást tartalmazza.

Ámde így[1]

$$\tfrac{1}{2} \cdot X_{l_\infty}\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})\big) \cdot (x_{i+1}-x_i) = \int_0^a \varphi(x)\, dx.^2$$

3. φ az elébbi pont függvényét jelentse. Vegyük fel a θ és k értékeket és képezzük a $d'_1, \ldots, d'_p$ intervallumokat.

Legyen X_l egy beosztás és (ξ, η) jelölje azon d'_h féle intervallumot, a melybe x_i esik. Ily (ξ, η), ha x_i egy d'_h-nak a $(0, a)$ belsejébe eső széle nyilván kettő van.

Legyen $[\lambda]=1$, ha $\varphi(x_i)-g^{\varphi}(\xi, \eta) \geqq \lambda$ és legyen $[\lambda]=1$, ha $\varphi(x_i)-g^{\varphi}(\xi, \eta) < \lambda$, megjegyezve, hogy ha x_i-hez két (ξ, η) van $[\lambda]$ értéke a két érték közül a nem kisebb legyen.

w egy tetszőleges, előre adott, positiv számot jelentsen. A θ

---

[1] Ha $\varphi(x)$ akármilyen a $(0, a)$-ban definiált függvény és X_{l_r} egy akármilyen sorozat

$$\varphi(x_i) \geqq g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}), \quad \varphi(x_{i+1}) \geqq g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})$$

miatt

$$\tfrac{1}{2} \cdot X_{l_r}(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})) \cdot (x_{i+1}-x_i) \geqq X_{l_r} g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1}-x_i)$$

s így az $\frac{1}{2} \cdot X_{l_r}(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})) \cdot (x_{i+1}-x_i)$ értéksorozat egy határértékese lehet kisebb, mint

$$X_{l_\infty} g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1}-x_i) = \int_0^a \varphi(x)\, dx.$$

[2] Áll még, hogy

$$\tfrac{1}{2} \cdot {}^{u}X^{v}_{l_\infty}(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})) \cdot (x_{i+1}-x_i) = \int_u^v \varphi(x)\, dx.$$

Továbbá

$$\lim(1) = \lim(2) = \int_0^a \varphi(x)\, dx, \qquad (\theta=0, \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_p=0)$$

s a $d'_1, \ldots, d'_p$ *választhatók úgy, hogy bármily a* φ*-hez normál* X_{l_r} *sorozatra*

$$\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot X_{l_r}[\lambda] \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < w,$$

ha csak r a sorozattól függően elég nagy.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy θ és $d'_1, \ldots, d'_p$ felvétettek (l. 2*a*). A (ξ, η) intervallumok mindegyikében felveszünk egy (ξ_1, η_1) intervallumot úgy, hogy $\xi<\xi_1<\eta_1<\eta$.

Jelöljék

$$x_l<x_{l+1}<\cdots<x_{m-1}<x_m,$$

az X_{l_r} beosztás azon osztópontjait, a melyekre

$$x_l \leqq \xi_1<x_{l+1}<\cdots<x_{m-1}<\eta \leqq x_m$$

áll.

Ha r elég nagy (feltételek az r-re nézve)

$$x_{l-1}>\xi, \quad x_{m+1}<\eta,$$

(az r-re annyi ily feltétel van, a hány l, m értékpár, azaz a hány (ξ, η) intervallum van).

Legyen $[i_1]=1$, ha $l \leqq i \leqq m$ (annyi ily egyenlőtlenség van, a hány l, m értékpár) és legyen $[i_1]=0$ a többi i értékre.

Legyen $[i_2]=1$, ha x_i egy (ξ, ξ_1) vagy (η_1, η)-ba esik a többi x_i-re $[i_2]=0$ vétessék.

Ha x_i a (ξ_1, η_1)-be esik és ha a (ξ_1, η_1)-et tartalmazó d'_h féle intervallum h értéke h, legyen

$$a_i = \varphi(x_i)-c_{h-1}$$

így (l. 2. a.) $a_i>0$.

Legyen $\varepsilon>0$. A θ, $d'_1, \ldots, d'_p$ és a (ξ_1, η_1)-ek kellő, de az X_{l_r} sorozattól független, választása által

$$\tfrac{1}{2} \cdot X_{l_r}[i_1] \cdot a_i \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot X_{l_r}[i_2] \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < \varepsilon, \tag{2}$$

hacsak r a sorozattól függőleg elég nagy.

Fogadjuk el ezen állítás helyességét. Az $[i_1] \cdot [\lambda]=1$ által jellemzett x_i pontok nyilván az $[i_1]=1$ által jellemzett pontok közül valók és a_i positiv. Így az (1) alapján

$$\tfrac{1}{2} \cdot X_{l_r}[i_1] \cdot [\lambda] \cdot a_i \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < \varepsilon,$$

s hasonló okból a (2) révén

$$\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot X_{l_r}[i_2] \cdot [\lambda] \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < \varepsilon.$$

Ha $\varphi(x_i) - g^{\varphi}(\xi, \eta) \geqq \lambda$, $a_i > \lambda$, mert $a_i = \varphi(x_i) - c_{h-1}$ és $g^{\varphi}(\xi, \eta) > c_{h-1}$. Tehát

$$\frac{\lambda}{2} \cdot X_{l_r}[i_1] \cdot [\lambda] \cdot (x_{i+1}-x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Így

$$\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot X_{l_r}[i_1] \cdot [\lambda] \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < \frac{\varepsilon \cdot d}{\lambda} \cdot$$

Azaz:

$$\tfrac{1}{2} \cdot d \cdot X_{l_r}[\lambda] \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{2} \cdot d \cdot X_{l_r}\big([i_1]+[i_2]\big) \cdot [\lambda] \cdot (x_{i+1}-x_{i-1}) < \varepsilon + \frac{\varepsilon \cdot d}{\lambda} \cdot$$

Ha tehát $\varepsilon < \dfrac{w \cdot \lambda}{\lambda+d}$ vétetik, a tétel be van bizonyítva, ha még kimutatjuk, hogy (1) és (2) a θ, $d'_1, \ldots, d'_p$ és a (ξ_1, η_1)-ek választása által elérhető.

θ és $d'_1, \ldots, d'_p$ úgy választandók, hogy

$$0 \leqq \int_0^a \varphi(x)\,dx - (c_0 \cdot d_1 + \cdots + c_{h-1} \cdot d_h + \cdots + c_{p-1} \cdot d_p < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (a)$$

álljon. (Lásd 2.)

A (ξ_1, η_1) féle intervallumokat úgy vegyük fel, hogy 1. ha $h<p$ a d'_h félékbe $(h=\text{const.}<p)$ eső (ξ, ξ_1), (η_1, η) féle intervallumok hosszösszege $<\varepsilon_h$ (l. 2. a) legyen és ha $h=p$ ugyane összeg $< \dfrac{\varepsilon}{4 \cdot c_{p-1}}$ legyen; 2. a $d \cdot (\xi_1 - \xi + \eta - \eta_1)$ féle értékek összege $< \dfrac{\varepsilon}{8}$ legyen. Látnivaló, hogy e feltételek az X_{l_r} sorozattól függetlenek.

Ha r elég nagy (feltétel az r-re), úgy nyilván

$$\left|\int_0^a \varphi(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$[1]

Így az (a)-ból

$$\begin{aligned}|(c_0\cdot d_1+\cdots+c_{h-1}\cdot d_h+\cdots+c_{p-1}\cdot d_p) &- \\ -\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})| &< \frac{\varepsilon}{2} \qquad (b)\end{aligned}$$

nyeretik.

Továbbá áll, hogy

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1}) &= \tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot c_{h-1}\cdot(x_{i+1}-x_{i-1}) + \\ &+\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot a_i\cdot(x_{i+1}-x_{i-1}) \geqq \\ &\geqq c_0\cdot d_1+\cdots+c_{h-1}\cdot d_h+\cdots+c_{p-1}\cdot d_p - \frac{\varepsilon}{4} + \\ &+\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot a_i\cdot(x_{i+1}-x_{i-1}). \qquad (c)\end{aligned}$$

Ugyanis az $X_{l_r}\tfrac{1}{2}\cdot[i_1]\cdot c_{h-1}\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})$ összeg azon

$$\tfrac{1}{2}\cdot c_{h-1}\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})$$

tagjai, a melyek egy a d'_h félékbe ($h=\text{const.}<p$) eső $[i_1]=1$ által jellemezett x_i pontból származnak oly i-nek felelnek meg, a melyre $l\leqq i\leqq m$.

E pontoknak a fenti összeghez való járulékaiknak

$$\left(\tfrac{1}{2}\cdot c_{h-1}\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})\right)$$

az összege nyilván $>c_{h-1}\cdot(x_m-x_l)$. Azon (x_m-x_l) értékek összege pedig, a melyekre $h=\text{const.}<p$, $>d_h$, mert

$$\eta_1-\xi_1\leqq x_m-x_l$$

---

[1] Ugyanis

$$\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})-\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}[i_1]\cdot\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})$$

nyilván nem nagyobb, mint a $d\cdot(\xi_1-\xi+\eta-\eta_1)$ féle értékek összege, azaz $\frac{\varepsilon}{8}$ és mivel X_{l_r} a φ-hez normál, ha csak r elég nagy

$$\left|\int_0^a \varphi(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}\varphi(x_i)\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

E két egyenlőtlenség egybevetéséből nyilván a szövegé származik.

és az $\eta_1-\xi_1$ félék ($h=\text{const.}<p$) összege $>d_h$ (mert a $(\xi_1-\xi+\eta-\eta_1)$ félék (h=const.$<p$) összege $<\varepsilon_h$).

$h=p$-re a járulékok összege $>c_{p-1}\,.\,d_p-\dfrac{\varepsilon}{4}$.

(b) és (c)-ből

$$\tfrac{1}{2}\,.\,X_{l_r}[i_1]\,.\,a_i\,.\,(x_{i+1}-x_{i-1})<\frac{3\varepsilon}{4}<\varepsilon,$$

azaz (1) következik, (2) pedig (az elég nagy r-ekre) a (ξ_1, η_1) féle intervallumok felvételi módjából következik, ugyanis a (2) baloldalán álló érték limese $r=\infty$-re, nyilván a $d\,.\,(\xi_1-\xi+\eta-\eta_1)$ féle értékek összege s ez összeg $<\dfrac{\varepsilon}{8}$.

4. *Borel-Lebesgue tétele.* Tartozzék a (0, a) minden x' pontjához egy bizonyos tulajdonságot mutató $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$ intervallum (ε és η az x'-től függnek az $\varepsilon+\eta$ a (0, a)-ban definiált függvény positiv, de alsó határa zérus lehet, $\varepsilon>0$ ha csak nem $x'=0$, $\eta>0$, ha csak nem $x'=a$) úgy, hogy ha

$$0\leqq\varepsilon'\leqq\varepsilon,\quad 0\leqq\eta'\leqq\eta$$

az $(x'-\varepsilon', x'+\eta')$, $(\varepsilon'+\eta'>0)$ is mutassa ugyanazon tulajdonságot.

Legyen $\mu>0$ és előre adott. Van oly X_l beosztás, hogy intervallumainak hosszai kisebbek μ-nél és minden intervalluma (az intervallum egy bizonyos x' pontjára nézve) egy fentebbi $(x'-\varepsilon', x'+\eta')$ féle intervallum.

Az $x'=0=x_0$ ponthoz van egy fentebbi (x_0, x_1) úgy, hogy $x_1-x_0<\mu$. Az x_1-hez való egy fentebbi (x_1, x_2) úgy, hogy $x_2-x_1<\mu$. Így nyerhetők $(x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n), \ldots$ Ha véges n-re $x_n=a$ a tétel áll.

Ámde az x_n pontok vehetők fel úgy, hogy véges számúval a éreretik.

Tegyük fel az ellenkezőt. $x_n<x_{n+1}$ miatt $\lim\limits_{n=\infty} x_n=\xi\leqq a$. ξ-hez való egy $((\xi-\varepsilon', \xi+\eta')$, $(\varepsilon'+\eta'<\mu, \varepsilon'>0)$ intervallum. Legyen m azon egész szám, a melyre

$$x_m\leqq\xi-\varepsilon<x_{m+1},\quad (x_{m+1}<\xi).$$

x_{m+2} helyébe $\xi+\eta$ véve $\lim_{n=\infty} x_n=\xi$ nyilván lehetetlen, azaz *a* véges számú ponttal éléretik.

5. φ egy a $(0, a)$-ban definiált, nem negativ és határolt alulról folytonos függvényt jelentsen.

Legyenek $m_1, m_2, \ldots, m_s, \ldots$ positiv növekvő egész számok. Létezzék minden ily sorhoz a $(0, a)$-ban definiált nem negativ $m_1(x), m_2(x), \ldots, m_s(x), \ldots$ függvények sora, a mely a következő sajátságokkal bír:

1. $m_s(x) \leqq m_{s+1}(x) \leqq \varphi(x)$.

2. Bármily $\mu>0$ számhoz s a $(0, a)$ bármily x' pontjához is van oly (a μ és x'-től függő) $\varepsilon>0$, $\eta>0$, hogy ha csak s elég nagy az $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$ minden pontjára

$$\varphi(x')-m_s(x)<\mu.$$

Az ily függvénysor tagját a φ approximáló függvényének nevezzük.[1]

Legyenek δ, w' előre adott positiv számok és legyen X_{l_r} egy a φ-hez normál sorozat. K egy a $\varphi(x)$ összes értékeinek felső d határánál nem kisebb véges állandót jelöljön.

Ha s a δ és w'-től függőleg elég nagyra vétetik, úgy ha csak r egy a sorozattól függő határnál nagyobb, az X_{l_r} beosztás azon x_i osztópontjaira, a melyekre

$$\varphi(x_i)-m_s(x_i)\geqq\delta \tag{1}$$

az $\frac{1}{2}.K.(x_{i+1}-x_{i-1})$ féle értékek N összege kisebb, mint w'.

Bizonyítás. Vegyük fel a 3. pontbeli θ, $d'_1, \ldots, d'_p$, (ξ_1, η_1) mennyiségeket úgy, hogy a 3. pont tétele jelen φ függvényre

$$\lambda=\frac{\delta}{2},\quad w=\frac{d}{K}\cdot\frac{w'}{4}$$

véve helyes legyen.

Jelentse (u, v) a $(0, a)$ egy intervallumát és legyen x' az

---

[1] Ha $X_{l_r}Y_{m_r}$ egy beosztási sorozat $m_r(x)$ az $S(x)$, $l_r(y)$ az $S(y)$, $m'_r(x)$ az $s(x)$, $l'_r(y)$ za $s(y)$ approximáló függvénye.

(u, v) egy pontja. A feltételek szerint van egy $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$ úgy, hogy ha csak s elég nagy az $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$ pontjaira

$$\varphi(x')-m_s(x) < \frac{\delta}{2},$$

vagyis tekintetbe véve, hogy $\varphi(x') \geqq g^{\varphi}(u, v)$

$$g^{\varphi}(u, v)-m_s(x) < \frac{\delta}{2}.$$

(u, v) helyébe (ξ_1, η_1)-et véve a Borel-Lebesgue-féle tétel alapján, minden (ξ_1, η_1)-nek van egy oly beosztása, hogy ha e beosztás egy intervalluma (ξ', η') a (ξ', η') pontjaira

$$g^{\varphi}(\xi, \eta)-m_s(x) < \frac{\delta}{2},$$

ha csak s egy a $(\xi' \eta')$-től függő határnál nagyobb.

Vegyünk egy oly nagy s-et, a mely nagyobb, mint az összes (ξ, η)-ákhoz való összes (ξ', η')-ek s-jei.

Az (1) nek eleget tevő x_i vagy egy (ξ_1, η_1) vagy egy (ξ, ξ_1), (η_1, η) belsejébe esik, vagy pedig egy ξ, ξ_1, η_1, η féle pont.

A (ξ_1, η_1)-be esők eleget tesznek a

$$g^{\varphi}(\xi, \eta)-m_s(x_i) < \frac{\delta}{2}$$

feltételnek, ámde

$$\varphi(x_i)-m_s(x_i) \geqq \delta$$

s így

$$\varphi(x_i)-g^{\varphi}(\xi, \eta) \geqq \frac{\delta}{2}.$$

E pontoknak az N-hez való $\frac{1}{2}.K.(x_{i+1}-x_{i-1})$ járulékainak az összege tehát a 3. pont szerint, ha csak r elég nagy $< \frac{w'}{4}$. Épp így a (ξ, ξ_1), (η_1, η)-ba esők járulékainak az összege $< \frac{w'}{4}$. A ξ, ξ_1, η_1, η pontok száma véges s így ha csak r elég nagy, járulékaik összege $< \frac{w'}{4}$.

Azaz $N < \frac{3w'}{4} < w'$.

6. *Ha* $\varphi(x)$ *és* $\psi(x)$ *két akármilyen a* $(0, a)$*-ban definiált függvény, úgy*

$$\int_0^a [\varphi(x)+\psi(x)]\,dx \geqq \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^a \psi(x)\,dx.$$ [1]

De ha φ *és* ψ *nem negativ és határolt alulról folytonos függvények, úgy*

$$\int_0^a [\varphi(x)+\psi(x)]\,dx = \int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^a \psi(x)\,dx.$$

Legyen $\delta_r > 0$, $\lim_{r=\infty} \delta_r = 0$. φ és ψ alulról folytonosak és határoltak. Így a $(0, a)$ minden x' pontjához van oly $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$, hogy pontjaira

$$g^{\varphi}(x'-\varepsilon, x'+\eta)+\delta_r > \varphi(x'),$$
$$g^{\psi}(x'-\varepsilon, x'+\eta)+\delta_r > \psi(x').$$ [2]

A Borel-Lebesgue-féle tételt alkalmazva, nyilvánvaló, hogy képezhető oly X_{l_r} beosztás, a melynek intervallumai kisebbek δ_r-nél és a melynek intervallumaira

$$g^{\varphi}(x_i, x_{i+1})+g^{\psi}(x_i, x_{i+1}) + 2\delta_r \geqq \varphi(x_i') + \psi(x_i') \geqq g^{\varphi+\psi}(x_i, x_{i+1})$$

áll, x_i' egy az (x_i, x_{i+1})-be eső értéket jelentvén.

Így

$$X_{l_r} g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1}-x_i) + X_{l_r} g^{\psi}(x_i, x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1}-x_i) +$$
$$+ X_{l_r} 2 \,.\, \delta_r (x_{i+1}-x_i) \geqq X_{l_r} g^{\varphi+\varphi}(x_i, x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1}-x_i).$$

Azaz

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx + \int_0^a \psi(x)\,dx \geqq \int_0^a [\varphi(x)+\psi(x)]\,dx,$$

s ekként a tétel igazolva van.

---

[1] Ha (u, v) a $(0, a)$ egy intervalluma $g^{\varphi+\psi}(u, v) \geqq g^{\varphi}(u, v)+g^{\psi}(u, v)$ s így

$$X_{l_r} g^{\varphi+\psi}(x_i, x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1}-x_i) \geqq X_{l_r} g^{\varphi}(x_i, x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1}-x_i) +$$
$$+ X_{l_r} g^{\psi}(x_i, x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1}-x_i)$$

az $r=\infty$ határra a szöveg állítása következik.

[2] ε és η az x' és r függvényei.

7. *Ha φ és ψ az elébbi függvények és ha egy X_{l_r} sorozat a $(\varphi+\psi)$ függvényhez normál, úgy X_{l_r} a φ és ψ-hez is normál.*

Ugyanis, ha az

$$\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}\big(\varphi(x_i)+\varphi(x_{i+1})\big)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

értékek sorának egy határértéke nagyobb volna (kisebb nem lehet) $\int\limits_0^a \varphi(x)\,dx$-nél a feltétel, azaz

$$\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_\infty}\big[\big(\varphi(x_i)+\psi(x_i)\big)+\big(\varphi(x_{i+1})+\psi(x_{i+1})\big)\big]\cdot(x_{i+1}-x_i) =$$
$$= \int\limits_0^a \big(\varphi(x)+\psi(x)\big)\,dx = \int\limits_0^a \varphi(x)\,dx + \int\limits_0^a \psi(x)\,dx \qquad \text{(l. 6.)}$$

miatt az

$$\tfrac{1}{2}\cdot X_{l_r}\big(\psi(x_i)+\psi(x_{i+1})\big)\cdot(x_{i+1}-x_i)$$

értékek sorának egy határértéke kisebb volna $\int\limits_0^a \psi(x)\,dx$-nél, de ez is lehetetlen.

A 6. és jelen pont tételei nyilván akárhány a φ tulajdonságait mutató függvényre is érvényesek.

8. *A $z=f(x, y)$ felületre vonatkozó $S(x)$ és $S(y)$ határoltak legyenek. K oly véges érték legyen, a melyre $K>S(x)$, $K>S(y)$. δ és η tetszőleges positiv számokat jelentsenek.*

Képezhető oly $X_{L_s}Y_{M_s}$ véges hányadosú beosztási sorozat, hogy ha csak s elég nagy az X_{L_s} beosztás azon x_i osztópontjaira, a melyekre

$$S(x_i)-M_s(x_i)\geqq\delta$$

az

$$\tfrac{1}{2}\cdot K\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})$$

féle értékek összege $<\eta$, s az Y_{M_s} beosztás azon y_j osztópontjaira, a melyekre

$$S(y_j)-L_s(y_j)\geqq\delta$$

az

$$\tfrac{1}{2}\cdot K\cdot(y_{j+1}-y_{j-1})$$

féle értékek összege $<\eta$.

Ugyanis jelöljük $S(y)$-t $S_x(y)$-al. Képezzünk oly véges hányadosú X_{L_s} sorozatot, a mely az

$$S(x)+S_x\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)$$

(alulról folytonos és határolt) függvényhez normál. Így X_{L_s} normál az $S(x)$ és $S_x\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)$-hez (l. 7.). Képezzük azon Y_{M_s} beosztási sorozatot, a melynek s-ik beosztására

$$M_s=L_s,\quad y_j=\frac{b}{a}\cdot x_j.\qquad (j=0,\ldots,L_s)$$

Az $X_{L_s}Y_{M_s}$ sorozat így nyilván véges hányadosú. Továbbá könnyű látni s a bizonyítást mellőzzük is, hogy az Y_{M_s} sorozat $S(y)$-hoz normál.

$M_s(x)$ az $S(x)$, $L_s(y)$ az $S(y)$ approximáló függvénye. Így az 5. pont alapján a tétel helyessége nyilvánvaló. *Könnyen belátható a harmadik fejezet végén közölt tétel helyessége. Az ottani $X_{l_r}Y_{m_r}$ sorozat ugyanis nyilván az itteni $X_{L_s}Y_{M_s}$ sorozat kellően választott tagjaiból állhat.*

Így a rectifiabilis $z=f(x,y)$-ra vonatkozólag az első fejezet I., II., III. problémái mind megoldattak.

9. Legyenek $S^{(h)}(x)$, $S_x^{(h)}(y)$, $m_r^{(h)}(x)$, $l_r^{(h)}(y)$ a $z=f^{(h)}(x,y)$-ra vonatkozó $S(x)$, $S(y)$, $m_r(x)$, $l_r(y)$ féle mennyiségek. Jelölje $s_x(y)$ a rectifiabilis felületre vonatkozó $s(y)$ (lásd III. fej. 4.) függvényt. Legyen Γ oly véges állandó, a melyre $s(x)<\Gamma$, $s_x(y)<\Gamma$ áll.

A rectifiabilis felülethez képezhető egy $X_{l_r}Y_{m_r}$ véges hányadosú beosztási sorozat, a mely a három segédfelületre nézve a harmadik fejezet végén leírt tételnek eleget tesz és a melynél az X_{l_r} (Y_{m_r}) beosztás azon osztópontjaira, a melyekre

$$s(x_i)-m_r'(x_i)\geqq\delta_r,\quad \left(s_x(y_j)-l_r'(y_j)\geqq\delta_r\right)$$

az

$$\tfrac{1}{2}\cdot\Gamma\cdot(x_{i+1}-x_{i-1}),\quad \left(\tfrac{1}{2}\cdot\Gamma\cdot(y_{j+1}-y_{j-1})\right)$$

féle értékek összege $<\eta_r[<\eta_r]$.

Képezzünk ugyanis egy véges hányadosú X_{L_s} az

$$S^{(1)}(x)+S_x^{(1)}\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)+S^{(2)}(x)+S_x^{(2)}\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)+$$
$$+S^{(3)}(x)+S_x^{(3)}\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)+s(x)+s_x\left(\frac{b}{a}\cdot x\right)$$

(alulról folytonos) függvényhez normál sorozatot.

Jelölje Y_{M_s} azon sorozatot, a melynek s-ik beosztására

$$M_s=L_s,\quad y_j=\frac{b}{a}\cdot x_j,\quad (j=0,\ldots,L_s)$$

áll.

Így az $X_{L_s}Y_{M_s}$ sorozat véges hányadosú. Továbbá X_{L_s} normál az $S^{(h)}(x)$, $s(x)$, Y_{M_s} normál az $S^{(h)}(y)$, $s(y)$ függvényekhez s e függvények approximáló függvényei $M_s^{(h)}(x)$, $M_s'(x)$, $L_s^{(h)}(y)$, $L_s'(y)$. Ezek után e fejezet tételeinek alapján könnyen belátható, hogy az $X_{l_r}Y_{m_r}$ sorozat az $X_{L_s}Y_{M_s}$ sorozat kellően választott tagjaiból állhat. E sorozatra

$$X_{l_\infty}Y_{m_\infty}(A_0B_0C_0+A_0D_0C_0)=X_{l_\infty}Y_{m_\infty}(A_0B_0'C_0D_0)=T_6=T_1$$

s így az első fejezet III. problémája a rectifiabilis felületre vonatkozólag megoldatott.

Megjegyzendő, hogy még

$$X_{l_\infty}Y_{m_\infty}(\theta'+\theta''+\theta'''+\theta'''')=0,$$
$$X_{l_\infty}Y_{m_\infty}(ABB'+BB'C)=0.$$

A bizonyításra vonatkozólag megjegyezzük, hogy a követendő út tökéletesen analog azzal, a melyet követtünk, midőn a rectifiabilis $z=f(x, y)$ quadraturáját eszközöltük, azaz a második fejezet speciális rectifiabilis felületéről térünk át az általánosra.

ÖTÖDIK FEJEZET.

Folytonos rendszert képező rectifiabilis felületek területének a változása. Eset, a melyben a rectifiabilis felület területét egy határozott integrál adja.

1. x és y a $(0, a)$, illetve a $(0, b)$-ben, u pedig a $(-\infty, +\infty)$-ben változván, legyenek

$$f^{(1)}(x, y, u), \quad f^{(2)}(x, y, u), \quad f^{(3)}(x, y, u)$$

határolt, egyértékű és folytonos függvények.

$$\xi = f^{(1)}(x, y, u), \quad \eta = f^{(2)}(x, y, u), \quad \zeta = f^{(3)}(x, y, z), \quad u = \text{const.}$$

tehát egy felület R_u egyenletei.

1902-ben LEBESGUE kimutatta, hogy ha R_u-nak a területe (a terület definitiójául T_2-őt véve) $T_2(u)$, $T_2(u)$ mint az u függvénye alulról folytonos.[1]

Tegyük fel, hogy minden R_u rectifiabilis. Azaz az u minden értékéhez van egy $G(u)$ véges és positiv állandó, a mely az R_u-ra vonatkozólag épp oly tulajdonságú, mint az első fejezetben G az R-re nézve.[2]

Jelölje $T(u)$ az R_u területét a terület definitiójául T_6 választatván. *Állítom, hogy $T(u)$ az u-nak alulról folytonos függvénye.*

Ugyanis legyen δ positiv és előre adott és legyen u' az u-nak egy értéke.

Kimutatjuk, hogy lehet oly $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ értékeket találni, hogy az $(u' - \varepsilon, u' + \eta)$ minden u pontjára

$$T(u') - T(u) < \delta,$$

miáltal állításunk (l. III. fej. 1.) igazolva lesz.

A IV. fej. 9. alapján képezhető oly $X_l Y_m$ beosztás, hogy az $R_{u'}$-re nézve

$$| X_l Y_m (A_0 B_0' C_0 D_0) - T(u') | < \frac{\delta}{4}, \tag{1}$$

$$X_l Y_m (\theta' + \theta'' + \theta''' + \theta'''' + A_0 B_0' B_0 + B_0 B_0' C_0) < \frac{\delta}{4} \cdot \tag{2}$$

Legyen $\lambda > 0$. Írjunk le az $R_{u'}$, $R_{i,j}$ (l. III. 4. a.) darabja kerületének minden pontjából λ küllővel gömböt. Jelölje $R_{i,j}'$ e göm-

---

[1] Szerző legújabb vizsgálatai alapján LEBESGUE tétele áll akkor is, ha a terület definitiója T_4.

[2] Bár egyedileg minden $G(u)$ véges, az összes $G(u)$ értékek felső határa $+\infty$ is lehet.

bök felületi és belső pontjaiból álló idomot. $R_{i,j}$ kerületének a hossza véges és igy az $R'_{i,j}$ bármily síkra való projectiója a λ elég kicsire való vételével egy $\frac{\delta}{4 \cdot l \cdot m}$-nél kisebb területű idomba zárható.

Ha ε és η elég kicsik, úgy az $(u'-\varepsilon, u'+\eta)$-ba eső bármily u-ra az R_u, $R_{i,j}$ darabjának a kerülete $R'_{i,j}$-be esik, mert $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$ az x, y, u folytonos függvényei.

Legyen u az $(u'-\varepsilon, u'+\eta)$ egy pontja. Vegyünk fel oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot, hogy $X_{l_1} Y_{m_1}$ az $X_l Y_m$-et tartalmazza és a melyre az R_u-ra nézve

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0) = T(u)$$

áll.

Az $X_{l_r} Y_{m_r}$ beosztásnak így esnek az $X_l Y_m$ $a_{i,j}$ parallelogrammjába parallelogrammjai. Jelölje $\Delta^{(r)}_{i,j}$ az ezen parallelogrammoknak megfelelő az R_u-hoz tartozó $A_0 B_0 C_0$, $A_0 D_0 C_0$ háromszöglapokból álló (egyszerűen összefüggő) felületet.

Ha r elég nagy, úgy $\Delta^{r}_{i,j}$ kerülete nyilván $R'_{i,j}$-be esik és e kerület az $R_{u'}$, $R_{i,j}$ darabjának kerületéből oly folyton deformatió által keletkeztethető, a melynek tartalma alatt a mozgó pontok $R'_{i,j}$-ben maradnak. Jelölje θ a kerület mozgása által leírt felületet.

Így az $R_{u'}$-re vonatkozó θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, $A_0 B'_0 B_0$, $B'_0 B_0 C_0$ a θ és a $\Delta^{(r)}_{i,j}$ egy oly egyszerűen összefüggő felületet képeznek, a melynek kerülete $A_0 B'_0 C_0 D_0$.

Vetítsük e felületet az $A_0 B'_0 C_0 D_0$ síkjára. E vetület az $A_0 B'_0 C_0 D_0$ parallelogrammot nyilván befedi és így

$$(A_0 B'_0 C_0 D_0) \leqq \theta' + \theta'' + \theta''' + \theta'''' + A_0 B'_0 B_0 + B'_0 B_0 C_0 + \\ + \frac{\delta}{4 \cdot l \cdot m} + \Delta^{(r)}_{i,j} t, \tag{3}$$

$\Delta^{(r)}_{i,j} t$ jelentvén $\Delta^{(r)}_{i,j}$ területét.

Az (1), (2) segélyével és a $\Delta^{(r)}_{i,j} t$ jelentését tekintetbe véve az $i=0, \ldots, l-1$, $j=0, \ldots, m-1$-re képezett $l \cdot m$ számú (3) féle egyenlőtlenségből

$$T(u')-\frac{\delta}{4}\leqq\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}+X_{l_r}Y_{m_r}(A_0B_0C_0+A_0C_0D_0),$$

vagyis

$$T(u')-X_{l_r}Y_{m_r}(A_0B_0C_0+A_0C_0D_0)\leqq\frac{3.\delta}{4}$$

következik.

Vegyük r-et még oly nagyra, hogy

$$|X_{l_r}Y_{m_r}(A_0B_0C_0+A_0C_0D_0)-T(u)|<\frac{\delta}{4}$$

álljon.

Így végül

$$T(u')-T(u)<\delta.$$

2. *Integrálható függvény. Integrál.* $\varphi(x, y)$ egy a P-ben definiált és határolt függvényt jelentsen. Jelentse $G_{i,j}$ ($g_{i,j}$ a φ-nek az $a_{i,j}$ pontjaira felvett értékeinek felső (alsó) határát) Ismeretes, hogy

$$XY.\,G_{i,j}\,.\,a_{i,j},\quad XYg_{i,j}\,.\,a_{i,j}$$

létezők és végesek.

Ha egyenlők, közös értékük jele

$$\int_0^a\int_0^b\varphi(x, y)\,.\,dx\,.\,dy,$$

s ez érték neve φ (kettős) integrálja és ekkor φ maga (kettősen) integrálhatónak neveztetik.

Ismeretes továbbá, hogy ha $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ véges számú egyenként integrálható függvények, úgy e függvények bármily algebrai nem tört függvénye például

$$[(\varphi\,.\,\psi-\chi\,.\,w)^2+(\varphi\,.\,w-)^2+\cdots]^{\frac{1}{2}}=\Psi(x, y)$$

is integrálható.

Továbbá, ha $\varphi', \psi', \chi', \ldots$ oly értékek, a melyek a $\varphi, \psi, \chi, \ldots$-nek az $a_{i,j}$-ben felvett értékei közé esnek

$$XY\,[(\varphi'\,.\,\psi'-\chi'\,.\,w')^2+(\varphi'\,.\,w'-\cdots)^2+\cdots]^{\frac{1}{2}}\,.\,a_{i,j}=$$
$$=\int_0^a\int_0^b \Psi(x,\,y)\,.\,dx\,.\,dy.$$

3. *Egy egyváltozós függvény négy deriváltja.* $y=\varphi(x)$ egy a $(0,\,a)$-ban definiált, határolt, egyértékű és folytonos függvényt jelentsen. Legyen x a $(0,\,a)$ egy belső pontja és legyen

$$u>0,\quad x-u\geqq 0,\quad x+u\leqq a.$$

Ha egy h úgy változik, hogy minden oly értéket, a mely >0, de $\leqq u$ felvesz, jelentse $\frac{L(x,\,x+u)}{l(x,\,x+u)}$ a $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ értékeinek $\frac{\text{felső}}{\text{alsó}}$ határát.

Épp így a $\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{-h}$ értékeinek a $\frac{\text{felső}}{\text{alsó}}$ határát $\frac{L'(x-u,\,x)}{l'(x-u,\,x)}$ jelentsék.

$L(x,\,x+u)$, $l(x,\,x+u)$, $L'(x-u,\,x)$, $l'(x-u,\,x)$ határértékei $u=0$-ra meghatározottak,[1] jelöljék őket sorban $\Lambda(x)$, $\lambda(x)$, $\Lambda'(x)$, $\lambda'(x)$. Látnivaló, hogy a $\Lambda(x)$, $\lambda(x)$ értékek definiálhatók a $(0,\,a)$ minden pontjára az a egyedüli kivételével épp így a $\Lambda'(x)$, $\lambda'(x)$ értékek az $x=0$ kivételével a $(0,\,a)$ minden pontjára definiálhatók. Ha tehát

$$\Lambda(a)=\Lambda'(a),\ \lambda(a)=\lambda'(a),\ \Lambda'(0)=\Lambda(0),\ \lambda'(0)=\lambda(0)$$

vétetik, négy a $(0,\,a)$ minden pontjára definiált függvényünk lesz. E négy függvényt a φ négy deriváltjának nevezzük.[2]

A deriváltak tulajdonságai.

a) Legyen $\varepsilon>0$ és előre adott. Ha h egy az ε-tól és az x-től függő positiv értéknél kisebb positiv szám, úgy

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$$

értéke $\Lambda(x)+\varepsilon$ és $\lambda(x)-\varepsilon$ közt van. Épp így

[1] Például $L(x,\,x+u)$ az u fogytával nem nő. E határértékek nyilván $+\infty$ és $-\infty$ értékkel is bírhatnak.

[2] $\Lambda(x)$, $\lambda(x)$, $\Lambda'(x)$, $\lambda'(x)$ neve jobb felső, jobb alsó, bal felső, bal alsó derivált.

$$\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{-h}$$

értéke $\Lambda'(x)+\varepsilon$ és $\lambda'(x)-\varepsilon$ közt van.

E tulajdonság a definitió közvetlen folyománya.

E tulajdonság geometriai értelmezése a következő: Az $y=\varphi(x)$ görbének az x, $\varphi(x)$ pontján átmenő azon húrjai, a melyeknek másik végpontja $x+h$, $\varphi(x+h)$, mind azon szögbe esnek, a melyet az x, $\varphi(x)$ ponton átmenő $\Lambda(x)+\varepsilon$, $\lambda(x)-\varepsilon$ irány-coefficienssel biró egyenesek képeznek egymással.

b) Jelentse (u, v) a $(0, a)$ egy intervallumát. Változtassuk v-ben a $\Lambda(x)$ értékét $\Lambda'(v)$-re. Jelentse L (l) az (u, v) pontjaira felvett $\Lambda(x)$ értékek felső (alsó) határát. Legyenek x' és $x''>x'$ az (u, v) tetszőleges pontjai.

Állítom, hogy

$$l \leqq \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'} \leqq L. \tag{1}$$

Tegyük fel, hogy az $y=\varphi(x)$ görbének, ha x az (x', x'')-ben változik, vannak pontjai az x', $\varphi(x')$, x'', $\varphi(x'')$ pontok összekötő távolsága «felett». Ha tehát e távolságot az y tengely positiv irányában önmagával parallel, kissé elmozdítjuk, még mindig lesznek felette a görbe említett részének pontjai. E távolság a görbe említett részét így metszi is s a metszéspontok közt lesz legalább egy olyan, a melytől kezdve, ha a görbét a növekvő x-ek irányában befutjuk a görbe (egy elég kis darabon) nem megy a távolság $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{alá}}{\text{fölé}}$. E pontban tehát

$$\begin{matrix}\Lambda(x)\geqq \\ \Lambda(x)\leqq\end{matrix}\ \frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}.$$

Hasonlókép igazolható e két utóbbi viszony, ha a görbe darab az x', $\varphi(x')$ és x'', $\varphi(x'')$ pontok összekötő távolságával esik egybe, vagy ha e távolság fölé nem megy. Ámde (u, v)-ben $l \leqq \Lambda(x) \leqq L$. Így tehát (1) helyes.

Analog tétel áll a többi három deriváltra is.

c) Ha

$$\Lambda(v)=\Lambda'(v),\ \lambda(v)=\lambda'(v),\ \Lambda'(u)=\Lambda(u),\ \lambda'(u)=\lambda(u)$$

vétetik a négy deriváltnak az (u, v)-ben ugyanazon $\substack{\text{felső}\\ \text{alsó}}$ határa van.

Legyenek például L, L', $\Lambda(x)$, illetve $\lambda'(x)$ felső határai az (u, v)-ben. Legyen $\varepsilon>0$. L a $\Lambda(x)$-nek felső határa, így van az (u, v) belsejébe vagy az $x=u$ szélére eső oly x' pont, hogy bizonyos az (u, v)-be eső $x''>x'$-re

$$\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}>L-\varepsilon.$$

Ámde így a *b)* alapján az (x', x'') egy belső pontjára

$$\lambda'(x)>L-\varepsilon.$$

Azaz L' értéke legalább is L. Épp így L értéke legalább is L'. Azaz $L'=L$.

d) Ha tehát a négy derivált egyike az $x=x'$ pontban folytonos,[1] úgy a többi három is folytonos $x=x'$-re, értékeik ott egyenlők, $y=\varphi(x)$ $x=x'$-re differentiálható és a differentiálhányados értéke a négy derivált közös értékével egyenlő.

4. Ha $y=$const. $z=f(x, y)$ az x függvénye. Képezhető tehát a négy deriváltja, $\Lambda_x(x, y)$, $\lambda_x(x, y)$, $\Lambda'_x(x, y)$, $\lambda'_x(x, y)$. A constans értékét változtatva, nyilván négy a P-ben definiált függvényt — jeleik az elébbiek nyerünk.

Ha $x=$const. $z=f(x, y)$ az y függvénye. Képezhető tehát y-t, tekintve független változónak négy $\Lambda_y(x, y)$, $\lambda_y(x, y)$, $\Lambda'_y(x, y)$, $\lambda'_y(x, y)$ derivált. A constans értékét változtatva négy a P-ben definiált függvényt nyerünk, jeleik az elébbiek.

---

[1] Legyen $\psi(x)$ egy a $(0, a)$-ban definiált függvény, a melynek értékei közt (miként ez a négy deriváltnál is van) a $+\infty$ s a $-\infty$ is előfordulhatnak. $\psi(x)$ az $x=x'$ pontban folytonos, ha bármi is a positiv δ, van oly positiv (a δ és x'-től függő) ε, hogy az $(x'-\varepsilon, x'+\varepsilon)$ minden pontjára $|\psi(x')-\psi(x)|<\delta$, $\psi(x)>\frac{1}{\delta}$, $\psi(x)<-\frac{1}{\delta}$, a szerint, a mint $\psi(x')$ véges vagy $\psi(x')=+\infty$, vagy $\psi(x')=-\infty$.

Az x szerint való négy deriváltnak minden a P-be eső $(x', x''; y', y'')$ parallelogrammban ugyanazon felső (alsó) határa van.[1] Hasonló áll az y szerint való négy deriváltra is. Jelölje ugyanis L a Λ_x-nek az $(x', x''; y', y'')$-ben a felső határát. Legyen $\varepsilon>0$. WEIERSTRASS egy tétele szerint van az $(x', x''; y', y'')$-ben oly x_1, y_1 pont, a melyre $\Lambda_x(x_1, y_1) \geqq L-\varepsilon$. De így a 3. $c)$ alapján $\lambda_x(x, y_1)$, $\Lambda'_x(x, y_1)$, $\lambda'_x(x, y_1)$ értékeinek a felső határa legalább is $L-\varepsilon$. Ez pedig elegendő az állítás igazolására.

Így a 2. pont alapján, ha a négy $\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}$ szerint való derivált egyike integrálható, a többi három is integrálható, s a négy integrál értéke azonos.

Nyilvánvaló, hogy az x és y szerint való négy-négy, összesen nyolcz derivált csak úgy lehet határolt, ha a $z=f(x, y)$ rectifiabilis s ez állítás fordítva is helyes.

5. *Eset, a melyben a rectifiabilis felület területét egy határozott integrál adja.*

Jelölje $\lambda_x^{(h)}$ a $z=f^{(h)}(x, y)$ $(h=1, 2, 3)$, négy x szerint való deriváltjának bármelyikét és épp így jelölje $\lambda_y^{(h)}$ az y szerint való deriváltak bármelyikét.

Legyen

$$\varphi(x, y) = [(\lambda_x^{(1)} . \lambda_y^{(2)} - \lambda_x^{(2)} . \lambda_y^{(1)})^2 + (\lambda_x^{(1)} . \lambda_y^{(3)} - \lambda_x^{(3)} . \lambda_y^{(1)})^2 + \\ + (\lambda_x^{(2)} . \lambda_y^{(3)} - \lambda_x^{(3)} . \lambda_y^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Ha $\lambda_x^{(h)}$ és $\lambda_y^{(h)}$ integrálhatók úgy (a rectifiabilis felületre)

$$T_1 = T_6 = XY(A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0) = XY(A_0B'_0C_0D_0) = \\ = \int_0^a \int_0^b \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Jelentsen ugyanis $X_{L_s} Y_{M_s}$ egy akármilyen beosztási sorozatot. Az A_0, B_0, C_0 pontoknak

ξ coordinátái $f^{(1)}(x_i, y_j)$, $f^{(1)}(x_i, y_{j+1})$, $f^{(1)}(x_{i+1}, y_{j+1})$,

η coordinátái $f^{(2)}(x_i, y_j)$, $f^{(2)}(x_i, y_{j+1})$, $f^{(2)}(x_{i+1}, y_{j+1})$.

[1] De az $(x', x''; y', y'')$ kerületén $\Lambda(x, y'') = \Lambda'(x, y''), \ldots$ veendő.

Így az $A_0B_0C_0$ háromszög $\xi\eta$ síkra való projectiójának a területe (B_0 projectiójába téve át a kezdőpontot)

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{f^{(1)}(x_i,y_j)-f^{(1)}(x_i,y_{j+1})}{y_{j+1}-y_j}\cdot\frac{f^{(2)}(x_{i+1},y_{j+1})-f^{(2)}(x_i,y_{j+1})}{x_{i+1}-x_i}-\right.$$
$$\left.-\frac{f^{(1)}(x_{i+1},y_{j+1})-f^{(1)}(x_i,y_{j+1})}{x_{i+1}-x_i}\cdot\frac{f^{(2)}(x_i,y_j)-f^{(2)}(x_i,y_{j+1})}{y_{j+1}-y_j}\right|\cdot a_{i,j}.$$

Ámde: $-\dfrac{f^{(1)}(x_i,y_j)-f^{(1)}(x_i,y_{j+1})}{y_{j+1}-y_j}$ egy oly érték, a mely a $\lambda_y^{(1)}$ értékeinek az $a_{i,j}$-ben felvett értékei közé esik. Ha tehát $\bar{\lambda}_y^{(1)}$ egy ily értéket jelent és ha $\bar{\lambda}_x^{(2)}$, $\bar{\lambda}_x^{(1)} \dots \bar{\lambda}_y^{(3)}$ analog jelentésűek, az $A_0B_0C_0$ háromszög $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ síkokra való projectióinak a területei

$$\tfrac{1}{2}\cdot\left|\bar{\lambda}_x^{(1)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(2)}-\bar{\lambda}_x^{(2)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(1)}\right|\cdot a_{i,j},\quad \tfrac{1}{2}\cdot\left|\bar{\lambda}_x^{(1)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(3)}-\bar{\lambda}_x^{(3)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(1)}\right|\cdot a_{i,j},$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\left|\bar{\lambda}_x^{(2)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(2)}-\bar{\lambda}_x^{(3)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(2)}\right|\cdot a_{i,j}.$$

Így

$$A_0B_0C_0=\tfrac{1}{2}\cdot[(\bar{\lambda}_x^{(1)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(2)}-\bar{\lambda}_x^{(2)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(1)})^2+(\bar{\lambda}_x^{(1)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(3)}-\lambda_x^{(3)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(1)})^2+$$
$$+(\bar{\lambda}_x^{(2)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(3)}-\bar{\lambda}_x^{(3)}\cdot\bar{\lambda}_y^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}}\cdot a_{i,j}.$$

Azaz a 2. pont alapján

$$X_{L_\infty}Y_{M_\infty}A_0B_0C_0=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\,.\,dx\,.\,dy.$$

Épp így

$$X_{L_\infty}Y_{M_\infty}A_0C_0D_0=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\,.\,dx\,.\,dy=X_{L_\infty}Y_{M_\infty}A_0B'_0C_0.$$

Azaz

$$X_{L_\infty}Y_{M_\infty}(A_0B_0C_0+A_0C_0D_0)=X_{L_\infty}Y_{M_\infty}(A_0B'_0C_0D_0)=$$
$$=\int_0^a\int_0^b\varphi(x,y)\,dx\,dy.$$

Ámde ha az $X_{L_8}Y_{M_8}$ sorozat a IV. fej. 9.-ben leírt sorozat

$$X_{L_\infty}Y_{M_\infty}(A_0B_0C_0+A_0C_0D_0)=T_1=T_6$$

s így a tétel igazolva van.

Következmények. 1. A leírt rectifiabilis felületre az első fejezet II. problémája is megoldatott.

2. Ha $\frac{\partial f^{(h)}}{\partial x}$, $\frac{\partial f^{(h)}}{\partial y}$ létezők és folytonosak, úgy ξ, η, ζ, x, y helyébe x, y, z, u, v vétetvén, az ismert

$$T_6 = XY(A_0B_0C_0+A_0C_0D_0) = XY(A_0B'_0C_0D_0 = \\ = \int_0^a \int_0^b (E \,.\, G-F^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, du \,.\, dv$$

GAUSStól származó képlet nyeretik.

3. Ha a tárgyalt rectifiabilis felület egyenletei

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = f^{(3)}(x, y),$$

úgy

$$t = \int_0^a \int_0^b (1+\lambda_y^2+\lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, dx \,.\, dy.$$

HATODIK FEJEZET.

A területnek egyéb definitiói és ezek viszonya a polyederek segélyével való definitióhoz.

LEBESGUE idézett munkájáig a területnek más definitiói is adattak. E definitiók szerzőit valószínűleg a SCHWARZ-féle példa figyelmeztette a terület definitiójának a hiányosságára. A hiányt pótolni akarták, de a kérdésnek a legkisebb határértékben rejlő kulcsát fel nem ismerve, a helyett hogy az első fejezetben közölt definitiók egyikét vagy másikát találták volna meg, definitióikat más elvekre fektették.

Így például MINKOWSKY a területet a következőkép definiálja. Írjunk le a felület minden pontjából mint középpontból r küllőjű gömböt. Jelölje V azon idom köbtartalmát, a mely áll e gömbök legalább egyikébe eső pontokból. A terület $\lim\limits_{r=0} \frac{V}{2r}$.

E definitió, ismereteinek hiányossága miatt, inkább V és $\lim\limits_{r=0} \frac{V}{2r}$ létezésének a kérdése mintsem definitió.

A felületek eléggé kiterjedt osztályainál V és $\lim\limits_{r=0} \frac{V}{2r}$ létezők és értékük T_6. Általában azonban még ha létező is,

$$\lim_{r=0} \frac{V}{2r} < T_1,$$

a mint ezt a következő példa igazolja.

A $\left(0, \frac{a}{2}; 0, b\right)$-ben R egyenletei

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = 0$$

legyenek. Az $\left(\frac{a}{2}, a; 0, b\right)$-ben az egyenletek

$$x = a - \xi, \quad y = \eta, \quad z = 0$$

legyenek.

Ekkor a mint az könnyen található

$$\lim_{r=0} \frac{V}{2r} = \frac{a}{2} \cdot b, \quad T_1 = T_6 = a \, . \, b.$$

Hermite a felületet véges számú darabra bontja s e darabok mindenikéhez (bizonyos módon) egy-egy sík polygont adjungál. Legyen S e polygonok területeinek az összege. A darabok lineáris dimenzióit határtalanul kisebbítve (ekkor a darabok száma határtalanul nő) S határértéke a felület területe.

Hermite az általa tárgyalt (regularis $z = f(x, y)$ felületre a daraboknak s az adjungált polygonoknak pontos meghatározását adja (ezek az $a_{i,j}$-k felé eső felületi darabok s az $AB'CD$ parallelogrammok).

E definitió is inkább egy probléma mintsem definitió, de még a probléma se tüzhető ki a priori.

A rectifiabilis felületnél felületi darab gyanánt a IV. fej. 9.-ben leírt $X_{l_r} Y_{m_r}$ beosztás $R_{i,j}$ idomát (II. fej. 4.) véve, adjungált polygonul $A_0 B'_0 C_0 D_0$-t választva, a terület Hermite-féle értéke

$$\lim S = X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (A_0 B'_0 C_0 D_0)$$

T_6-al lesz egyenlő.

A választás előnyösségét ezen utóbbi körülményen kivül még az is igazolja, hogy az $l_r \, . \, m_r$ számú $R_{i,j}$ T_6-féle területeinek az összege T_6, az $R_{i,j}$ hat (θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, $A_0 B'_0 B_0$, $B'_0 B_0 C_0$)

felület hozzácsatolásával egy egyszerűen összefüggő felület lesz, a melynek kerülete $A_0B'_0C_0D_0$ kerülete s e hat felület területének a rendje általában magasabb rendű végtelen kicsi, mint $\frac{1}{l_r^2}$, míg $R_{i,j}$ és $A_0B'_0C_0D_0$ területeinek a rendje általában $\frac{1}{l_r^2}$ s e két utóbbi terület absolut különbségének rendje általában $\frac{1}{l_r^2}$-nál magasabb rendű végtelen kicsi.

Peano definitiója. Bontsuk a felületet véges számú darabra, a melyek közül bármely kettőnek sincs közös pontja. Válaszszuk el e darabokat egymástól és vigyük őket deformatió nélkül egy-egy véghelyzetbe. Vetítsük e darabok mindenikét egy állandó síkra. Legyen U a vetületek területeinek az összege. A felület minden feldarabolására s a darabok minden helyzetére képezett U értékek felső U_1 határát definiálja PEANO terület gyanánt.

E definitió ellen két kifogás emelhető. Az egyik a darab pontos definitiójának a hiánya, a másik pedig az, hogy egy darab vetületének általában nincs területe.

Az első kifogást a darab definitiójának a megadásával eloszlatjuk, a második pedig tárgytalan lesz, ha a terület helyébe a mindig létező (JORDAN-féle) belső terjedelmet[1] veszszük.

Így módosítva a PEANO-féle definitió kifogástalan és U_1 létele a priori világos.

A darab definitiója. Legyenek $S_1, \ldots, S_k, \ldots$ a P-be eső

---

[1] Legyen H egy a $(0, a;\ 0, b)$-be eső idom. Legyen $\varepsilon_{i,j}=1$, ha $\alpha_{i,j}$ a H-nak legalább egy pontját tartalmazza és legyen $\varepsilon_{i,j}=0$, ha $\alpha_{i,j}$ a H-nak egy pontját se tartalmazza. Legyen $\lambda_{i,j}=1$, ha $\alpha_{i,j}$ minden pontja a H pontja és legyen $\lambda_{i,j}=0$, ha az $\alpha_{i,j}$-nek legalább egy pontja nem pontja a H-nak.

$XY\varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ és $XY\lambda_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$ létezők. Nevük H-nak külső, illetve belső (sík és JORDAN-féle) terjedelme. Áll, hogy

$$a \cdot b \geqq XY\varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \geqq XY\lambda_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \geqq 0.$$

Ha a két terjedelem egyenlő, azt mondjuk, hogy H területtel bír s a terület a külső és belső terjedelem közös értéke.

Ha H egy tetszőleges parallelogrammba záratik az analog geometriai határátmenettel nyert értékek a fentiekkel egyeznek.

oly tartományok (l. I. fej.), hogy S_k az S_{k+1} belsejébe esik. Jelentse Q azon idomot, a melynek minden pontjához van egy véges k úgy, hogy e pont az S_k pontja. Az xy pont a Q-ban változván, a

$$\xi = f^{(1)}, \quad \eta = f^{(2)}, \quad \zeta = f^{(3)}$$

egyenletek által képviselt Q' idomot (az első fejezetben említett második szempontból tekintve) definiáljuk R darabja gyanánt. xy az S_k-ban változván, legyen S'_k a

$$\xi = f^{(1)}, \quad \eta = f^{(2)}, \quad \zeta = f^{(3)}$$

felület jele.

S'_k-nek az első fejezetben definiáltuk ($T_1, \dots, T_6$-féle) területét. Q' ($T_1, \dots, T_6$-féle) területekép S'_k területének $k = \infty$-re vett határát definiáljuk.

Igazolható, de az igazolást mellőzzük, hogy e határérték létező és nem kisebb mint S'_k területe, továbbá Q' területe független a Q-t definiáló $S_1, \dots, S_k, \dots$ tartományok sorától és hogy képezhető oly $\varDelta_s$ polyedersorozat, a melyre $\lim\limits_{s=\infty} \varDelta_s t$ a Q' területével egyenlő e polyedersorozat bizonyos könnyen található tulajdonságokat mutatván.

Igazolható továbbá, de itt is mellőzzük az igazolást, hogy ha R, miként a Peano-féle definitiónál darabokra bontatik, e darabok ($T_1, \dots, T_6$-féle) területeinek az összege nem nagyobb, mint az R ($T_1, \dots, T_6$-féle) területe.

Vegyünk fel egy tetszőleges p síkot. Vetítsük Q'-et e síkra. Legyen Q'' a vetület belső terjedelme. Vetítsük $\varDelta_s$-et a p-re. Legyen $\varDelta_s^{(p)} t$ a vetület területe.

Tegyük fel, hogy ki lehetne mutatni mikép

$$\lim_{s=\infty} \varDelta_s^{(p)} t = Q''.^1 \tag{1}$$

[1] A feltevés helyessége kimutatható lenne, ha a következő állítás igaz volna: «Legyen w egy oly derékszögű négyszög, a mely a Q'-nek a p-re való projectiójába esik, ekkor a $\varDelta_s$-nek a p-re való projectiója egy oly az w-ba eső w_s derékszögű négyszöget tartalmaz, a melynek $s = \infty$-re a határa w.»

Ez azon állítás, a melyet Lebesgue bizonyítás nélkül közöl (l. Intégrale, Longueur, Aire, p. 76), s a mely nagyon is elfogadhatónak látszik. Ámde egyszerű példákkal ki lehet mutatni az állítás téves voltát.

Így tehát, ha δ egy tetszőleges előre adott positiv szám

$$\Delta_s t \geqq \Delta_s^{(p)} t \text{ miatt } \Delta_s t + \delta > Q'',$$

ha csak s elég nagy.

Azaz a PEANO-féle definitióban említett darabok ($T_1, \ldots, T_6$-féle) területeinek az összege nem kisebb, mint a megfelelő U. Ámde a darabok területeinek az összege nem nagyobb, mint az R területe. Azaz U nem nagyobb R területénél. Így U_1 se lehet R területénél nagyobb.

A $z=f(x, y)$ esetén az (1) bár hosszadalmasan, de aránylag könnyen mutatható ki. Ezt elfogadva kimutatjuk, hogy *a rectifiabilis $z=f(x, y)$ felületnél $U_1 = T_6$.*

Ugyanis jelölje θ_1' az $x=x_i$ síkba eső az $\overline{AB'}$, $\overline{B'B}$, $\widehat{BA}$ által bezárt területet és legyen θ_2' az $y=y_{j+1}$ síkba eső a $\overline{BB'}$, $\overline{B'C}$, $\widehat{CB}$ által bezárt terület. Nyilván

$$|\theta_1' - \theta_1| \leqq ABB', \quad |\theta_2' - \theta_2| \leqq BB'C. \tag{2}$$

Vegyünk fel (l. II. és IV. fej.) oly $X_{l_r} Y_{m_r}$ sorozatot, a melyre

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty}(AB'CD) = T_6, \quad X_{l_\infty} Y_{m_\infty}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \\ + ABB' + BB'C) = 0. \tag{3}$$

Jelölje $f_{i,j}$ az $a_{i,j}$ belső pontjainak megfelelő felületi darabot. Az $f_{i,j}$, θ_1', θ_2, θ_3, θ_4 egyesítéséből álló felület egyszerűen összefüggő és kerülete $AB'CD$ kerülete.

Hozzuk e felületet, deformátió nélkül, oly helyzetbe, hogy $AB'CD$ új helyzetének a síkja a p-vel parallel legyen. Vetítsük e felületet új helyzetéből a p-re. E vetület az $AB'CD$ parallelogramm új helyzetének a p-re való projectióját (mely az $AB'CD$-vel congruens) befedi. Így

$$(AB'CD) \leqq \theta_1' + \theta_2' + \theta_3 + \theta_4 + u_{i,j}$$

itt $u_{i,j}$ az $f_{i,j}$ új helyzete p-re való vetületének a belső terjedelme.[1]

---

[1] Az $f_{i,j}$ bármily síkra való projectiója területtel bír.

Azaz

$$X_{l_r} Y_{m_r} (AB'CD) \leqq X_{l_r} Y_{m_r} (\theta'_1+\theta'_2+\theta_3+\theta_4)+X_{l_r} Y_{m_r} u_{i,j} \leqq$$
$$\leqq X_{l_r} Y_{m_r} (\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+ABB'+BB'C)+X_{l_r} Y_{m_r} u_{i,j}. \text{ (l. (2))}$$

Ámde $X_{l_r} Y_{m_r} u_{i,j}$ egy U érték. Így a (2) és (3) tekintetbevételével az U értékek egy határértéke $\geq T_6$, azaz $U_1 = T_6$.

Térjünk vissza az R-hez. Legyen x', y', z' egy új derékszögű pontcoordinátarendszer. Vetítsük Q'-et az $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ síkokra. Legyenek Q_1, Q_2, Q_3 e vetületek belső terjedelmei. Vetítsük Δ_s-et is e síkokra, a vetületek területei A, B, C legyenek. Ha $\delta > 0$ és előre adott, ha csak s elég nagy, feltéve, hogy az (1) helyes

$$A+\delta>Q_1, \quad B+\delta>Q_2, \quad C+\delta>Q_3,$$

így

$$(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}+3\delta>(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ámde elemi tételek alapján

$$\Delta_s t \geq (A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}$$

s így

$$\Delta_s t+3\delta>(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

azaz az $s=\infty$, $\delta=0$ határra átmenve kijő, hogy Q' területe nem kisebb, mint

$$(Q_1^2+Q_3^2+Q_3^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Bontsuk a felületet miként a Peano-féle definitiónál darabokra és képezzük az ezen darabokra vonatkozó $(Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2)^{\frac{1}{2}}$-féle értékek V összegét. Jelölje V_1 az összes lehetséges V értékek felső határát. U_1-hez hasonlókép V_1 se lehet nagyobb R területénél.

A rectifiabilis $z=f(x, y)$-nál $V_1 = T_6$.

Ugyanis vetítsük az $f_{i,j}$, θ'_1, θ'_2, θ_3, θ_4-ből álló egyszerűen összefüggő felületet az $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ síkokra. Ha $AB'CD$, illetve $f_{i,j}$ vetületeinek a területei $(AB'CD)_{z'}$, $(AB'CD)_{y'}$, $(AB'CD)_{x'}$, illetve $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ áll, hogy

$$(AB'CD)_{z'} \leqq \theta'_1+\theta'_2+\theta_3+\theta_4+A_{i,j},$$
$$(AB'CD)_{y'} \leqq \theta'_1+\theta'_2+\theta_3+\theta_4+B_{i,j},$$
$$(AB'CD)_{x'} \leqq \theta'_1+\theta'_2+\theta_3+\theta_4+C_{i,j}.$$

Innen

$$(AB'CD) \leqq 3\,(\theta'_1+\theta'_2+\theta_3+\theta_4)+(A^2_{i,j}+B^2_{i,j}+C^2_{i,j})^{\frac{1}{2}}$$

következik és épp úgy mint U_1-re $V_1 = T_6$ következtethető.

Jegyzet. Bontsuk a rectifiabilis $z = f(x, y)$ felületet véges számú darabra úgy, hogy e darabok mindenikének a Q-ja egy (kerületétől megfosztott) tartomány legyen s a P minden pontja vagy egy ily tartományba vagy a kerületére essék. Ekkor

$$\lim V = T_6,$$

ha a tartományok úgy változnak, hogy lineáris dimenzióik a zérus felé convergálnak. Megjegyzendő még, hogy a Q'-ek vetületei ez esetben területtel bírnak.

Geöcze Zoárd.

ALGEBRAI GÖRBÉK ARITHMETIKAI TULAJDONSÁGAIRÓL.

(Második és befejező közlemény.)

III. Másodfajú görbékről.

1.

Rationális koefficiensű másodfajú görbéken mindig vannak rationális pontkettősök. Rationális pontkettőst metsz ki a rationális koefficiensű n-edrendű másodfajú görbéből, melyet röviden $C_n^{(2)}$-nek fogunk nevezni, minden rationális koefficiensű $(n-3)$-adrendű adjungált görbe. Ezen pontkettősök a $C_n^{(2)}$-nek $g_{2p-2}^{p-1} = g_2^1$ canonicus pontrendszeréhez tartoznak. Általánosságban a $C_n^{(2)}$-n vannak olyan rationális pontkettősök is, melyek nem tartoznak az előbbi rationális pontkettősök közé.

Messük ugyanis $C_n^{(2)}$-t egy rationális koefficiensű egyenessel. Ez egy n-elemű rationális pontcsoportot metsz ki a $C_n^{(2)}$-ből. Ezen pontcsoport minden egyes pontján $(n-3)$-adrendű adjungált görbéket vezetvén, mindegyik még egy pontban metszi $C_n^{(2)}$-t a kettőspontokon kívül. Az így nyert n pont ismét egy n-elemű rationális pontcsoportot alkot, mivel, bár az egyes $(n-3)$-adrendű adjungált görbék nem rationális koefficiensüek, összességük egy $n(n-3)$-adrendű rationális koefficiensekkel biró görbét alkot, mely a $C_n^{(2)}$-t a kettőspontok rationális pontcsoportján és a rationális koefficiensű egyenesen levő n-elemű rationális pontcsoporton kívül a mondott n-elemű rationális pontcsoportban metszi. Az így kapott n-elemű rationális pontcsoporton általánosságban lehet egy $(n-2)$-edrendű nem degeneráló adjungált görbét átfektetni, mely a $C_n^{(2)}$-t az n-elemű rationális pontcsoporton kívül egy, a g_2^1-hez nem tartozó, rationális pontkettősben metszi.

Ha pedig $C_n^{(2)}$-nek egy oly rationális pontkettősét ismerjük, mely nem tartozik g_2^1-hez, akkor fel lehet állítani olyan rationális koefficiensű birationális transformátiót, mely a $C_n^{(2)}$-t átviszi egy rationális koefficiensű (egy kettősponttal biró) negyedrendű C görbébe.

Vezessünk ugyanis az ismeretes rationális pontkettősben a $C_n^{(2)}$-t érintő rationális koefficiensű $(n-2)$-edrendű adjungált görbét, mely a rationális pontkettősön kívül egy $(n-2)$-elemű rationális pontcsoportban metszi a $C_n^{(2)}$-t. Ezen $(n-2)$-elemű rationális pontcsoporton[1] kétszeresen végtelen sok $(n-2)$-edrendű adjungált görbe megy át, melyeknek egyenlete

$$\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\lambda_3\varphi_3=0, \tag{11}$$

a hol λ_1, λ_2, λ_3 tetszőleges konstansok, φ_1, φ_2, φ_3 $(n-2)$-edrendű rationális koefficiensekkel biró adjungált görbék.

Alkalmazzuk most az

$$F(x, y)=0 \tag{12}$$

n-edrendű másodfajú $C_n^{(2)}$ görbére a

$$\xi=\frac{\varphi_1(x, y)}{\varphi_3(x, y)}, \quad \eta=\frac{\varphi_2(x, y)}{\varphi_3(x, y)} \tag{13}$$

rationális koefficiensű birationális transformatiót, akkor (12) alatti $C_n^{(2)}$ görbe átmegy egy

$$f(\xi, \eta)=0 \tag{14}$$

negyedrendű egy kettősponttal biró rationális koefficiensekkel biró C görbébe, mivel (11) görbehálózat a (12) alatti $C_n^{(2)}$ görbét négy változó pontban metszi.

---

[1] Ezen $(n-2)$-elemű rationális pontcsoport helyett vehetjük azon $(n-2)$-elemű rationális pontcsoportot, melyben a rationális pontkettősön keresztülmenő egyenes metszi $C_n^{(2)}$-t.

Általánosságban tehát egy $C_n^{(2)}$ görbét mindig át lehet vinni egy C görbébe rationális koefficiensű birationális transformatióval.

Ezen transformatió miatt $C_n^{(2)}$ minden rationális pontjának, minden rationális pontkettősének megfelel a C görbe egy rationális pontja, illetve rationális pontkettőse és viszont. Kivételt csupán a transformáló görbék alappontjai képeznek. A $C_n^{(2)}$ és a C között levő ezen vonatkozás miatt a két görbét arithmetikai szempontból æquivalensnek lehet tekinteni, s épen ezért a következőkben csak a C negyedrendű egy kettősponttal biró görbével fogunk foglalkozni.

2.

A negyedrendű egy kettősponttal biró rationális koefficiensű görbén, melyet a következőkben is röviden C-nek fogunk nevezni a g_2^1 canonicus rendszerhez tartozó rationális pontkettősöket a kettősponton átmenő sugársor rationális koefficiensű sugarai metszik ki. Az ilyen pontkettősöket perspektiv rationális pontkettősöknek fogjuk nevezni, mivel két pontjuk a kettőspontot illetőleg perspektiv helyzetű.

A perspektiv rationális pontkettősökön kívül a C-n általánosságban vannak még más igen könnyen feltalálható rationális pontkettősök is. Ilyen rationális pontkettőst metszenek ki a C-ből a kettőspont érintői. Az általános esetben a kettőspont vagy izolált, s érintői képzetesek, vagy pedig nem izolált és érintői nem rationálisak. Csak különös esetben történhetik meg, hogy rationális pontkettős helyett rationális pontokat nyerünk a C görbén. Ilyen különös eset az, a mikor a két érintő rationális koefficiensekkel bír, a mikor mindkét érintő rationális pontokat metsz ki a C görbéből, vagy ha a C görbe csúcscsal bír, a mikor a csúcsérintő metszi ki a rationális pontot a C görbéből, vagy ha kettőspont egyik érintője inflexiós érintő, a mikor a másik érintő C-t rationális pontban találja. Igen különös esetben nem kapunk sem rationális pontot, sem rationális pontkettőst, ha t. i. a kettőspont mindkét érintője inflexiós érintő.

Az így kapott rationális pontkettősből vagy rationális pontból általánosan kétszeresen végtelen sok rationális pontkettőst tudunk szerkeszteni a C görbén.

Egy rationális (nem perspektiv) pontkettősből vagy, a mi lényegileg semmit sem egyszerűsit a szerkesztésen, egy rationális pontból rationális pontkettősök leszármaztatása tisztán vonalas szerkesztésre is ad alkalmat, melynél tehát csak egyenesek metszőpontjait kell meghatároznunk a C görbével.[1] Ennek oka egyrészről az, hogy egy rationális pontkettősön keresztülfektetett egyenes ismét rationális pontkettőst metsz ki a C görbéből, másrészről pedig az, hogy egy rationális pontkettőst a kettőspontból projiciáló sugársor a C görbét egy új rationális pontkettősben találja.

Ezek alapján a rationális pontkettősöknek jelzett vonalas szerkesztése a következőkép eszközölhető. Az adott rationális pontkettősön egyenest vezetünk keresztül, mely a C görbét egy rationális pontkettősben metszi. Az így kapott rationális pontkettőst a kettőspontból a görbére projiciáljuk s a nyert új rationális pontkettősön ismét egyenest vezetünk át, és így tovább. Ezen eljárást visszafelé is folytathatjuk, ha az adott rationális pontkettőst először a helyett, hogy rajta egyenest fektetnénk, a kettőspontból a görbére projiciáljuk, s az így kapott rationális pontkettősön keresztül egyenest vezetünk és így tovább.

Ezen eljárással kapott rationális pontkettősök általában nem merítik ki az adott rationális pontkettősből leszármaztatható összes rationális pontkettősöket. Új rationális pontkettősöket kapunk, ha az adotton keresztül a C görbét elsőrendűen érintő adjungált kúpszeletet vezetünk, s az ez által

[1] Ezzel azonban nem állítjuk, hogy a vonalzóval valóságban meg is szerkeszthetők a rationális pontkettősök, ha le van rajzolva a C görbe, mivel a rationális pontkettősök pontjai nem szükségképen reálisak.

kapott rationális pontkettősre az előbb leírt vonalas szerkesztést alkalmazzuk. Az így megkapott rationális pontkettősök közül kettőn keresztül ismét adjungált kúpszeletet vezetünk, s az általa kimetszett rationális pontkettősre ismét a vonalas szerkesztést alkalmazzuk. Magasabbrendű adjungált görbéket nem szükség igénybe vennünk a szerkesztésnél, mivel az összes rationális pontkettősöket, melyek egy adott rationális pontkettősből leszármaztathatók, egyenesek és adjungált kúpszeletek által meg tudjuk szerkeszteni, a mint a következő fejezetből ki fog tűnni.

A mondott két szerkesztésből kitűnik, hogy azon semmit sem egyszerűsít az, ha a rationális pontkettős helyett rationális pont ismeretes, mivel úgy az egyenesek, mint azon kúpszeletek szerkesztésénél, melyek által új pontkettőshöz jutunk el, párosszámú pontból álló rationális pontcsoportra van szükségünk.

Ha a C görbén egy oly rationális pontkettős is ismeretes, a mely különbözik az előbbi rationális pontkettősből leszármaztatható pontkettősöktől, akkor ebből is leszármaztatható végtelen sok rationális pontkettős az ismertetett szerkesztéssel, de ezeken kívül még újakat is kapunk, ha adjungált kúpszeleteket vezetünk keresztül oly két pontkettősön, a melyek közül az egyik az első, a másik a második rationális pontkettősből szerkeszthető. Több egymástól független rationális pontkettősből, vagyis olyan pontkettősökből, melyek közül egyik sem származtatható le a többiekből, szerkeszthető rationális pontkettősök felkeresése a mondottak alapján könnyen elvégezhető.

3.

A C-n levő rationális pontkettősöket, miként az általános esetben, itt is argumentumokkal jellemezzük. Egyszerűség kedvéért nemcsak azt tételezzük föl, hogy az argumentumokban szereplő integrálok alsó határai ugyanazok, hanem azt is, hogy ezen alsó határ azon hat pont egyike, melyeknek érintői a kettősponton mennek keresztül.

Az alsó határ ily megválasztása mellett az ABEL-féle theoréma szerint a perspektiv pontkettősök argumentumai

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Ha most is $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ jelölik egy tetszőleges egyenesre vonatkozó argumentumokat, akkor, mivel egy perspektiv pontkettős argumentumai zérók, azért a kettősponthoz (mint rationális pontkettőshöz) tartozó argumentumok

$$\delta_1 = \varkappa_1, \quad \delta_2 = \varkappa_2,$$

s a kettőspont két érintője által kimetszett rationális pontkettős argumentumai

$$-\varkappa_1, \quad -\varkappa_2.$$

Igen egyszerűen állíthatjuk elő egy (a_1, a_2) argumentumú (nem perspektiv) rationális pontkettős argumentumai segítségével a belőle vonalasan szerkeszthető rationális pontkettősök argumentumait.

Az (a_1, a_2) pontkettősön keresztül vezetett egyenes a

$$\varkappa_1 - a_1, \quad \varkappa_2 - a_2$$

argumentumú rationális pontkettőst metszi ki a C görbéből. Ha pedig az (a_1, a_2) pontkettőst a kettőspontból a C görbére projiciáljuk, akkor a kapott új rationális pontkettős argumentumai annak tekintetbe vételével, hogy a perspektiv pontkettősök argumentumai zéró értékűek,

$$-a_1, \quad -a_2.$$

Ezek alapján könnyen belátható, hogy az (a_1, a_2) rationális pontkettősből vonalasan szerkeszthető rationális pontkettősök argumentumai vagy

$$a_1 + n\varkappa_1, \quad a_2 + n\varkappa_2,$$

vagy

$$-a_1 + n\varkappa_1, \quad -a_2 + n\varkappa_2$$

alakúak, a hol n minden egész szám lehet, és pedig az első vagy a második alakkal bírnak, a szerint, a mint páros vagy páratlan lépéssel jutottunk az (a_1, a_2) rationális pontkettősből az illető rationális pontkettőshöz.

Az (a_1, a_2) pontkettősből adjungált kúpszeletek által szerkeszthető rationális pontkettősök argumentumai is egyszerűen állíthatók elő az a_1, a_2 argumentumokkal. Egy adjungált kúpszelet által kimetszett hat pontra vonatkozó argumentumok

$$2\varkappa_1 - \varkappa_1 = \varkappa_1, \quad 2\varkappa_2 - \varkappa_2 = \varkappa_2$$

lévén, az (a_1, a_2) rationális pontkettősben érintő adjungált kúpszelet által kimetszett rationális pontkettős argumentumai

$$-2a_1 + \varkappa_1, \quad -2a_2 + \varkappa_2.$$

Ezen és a $(-a_1, -a_2)$ rationális pontkettősön keresztülvezetett adjungált kúpszelet a

$$3a_1, \quad 3a_2$$

argumentumú pontkettősben találja még a C görbét. Ezen utóbbi és az $(a_1 + \varkappa_1, a_2 + \varkappa_2)$ rationális pontkettősön átmenő adjungált kúpszelet a

$$-4a_1, \quad -4a_2$$

rationális pontkettőst metszi ki a C görbéből, és így tovább.

Mondhatjuk tehát, hogy az (a_1, a_2) rationális pontkettősből szerkeszthető rationális pontkettősök argumentumai

$$na_1 + m\varkappa_1, \quad na_2 + m\varkappa_2,$$

a hol n és m felvehet minden egészszámú értéket. Az $n=0$, $m=0$ értékeknek megfelelnek az összes rationális perspektiv pontkettősök, az $n=0$, $m \neq 0$ értékeknek megfelelnek a kettőspont érintői által kimetszett rationális pontkettősből leszármaztatható rationális pontkettősök.

Az általános esetben egy p-elemű $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ rationális pontcsoportból a következő p-elemű rationális pontcsoportokat kaptuk

$$a+m\bar{a}+k\sigma,$$

a hol m és k tetszőleges egész számok,

$$\bar{a}=\varepsilon a+\mu_0\varkappa+\lambda_0\delta,$$

$$\rho=\frac{n}{\rho}\varkappa+\frac{2d}{\rho}\delta,$$

és λ_0 és μ_0 eleget tesznek a

$$2d\lambda - n\mu = \varepsilon p$$

egyenletnek.

A C görbe esetén $n=4$, $2d=2$, $\varepsilon=1$, $p=2$, $\rho=4$, $\lambda_0=1$, $\mu_0=0$, továbbá az integrátió alsó határára tett megszorításunk miatt $\delta_1=\varkappa_1$, $\delta_2=\varkappa_2$. Ennek következtében az általánosított eljárást alkalmazva a C görbére, csak az

$$(m+1)\alpha+(m+3k)\varkappa$$

rationális pontkettősöket kapjuk meg, a hol m és k tetszőleges egész számok. Az így kapott pontcsoportokat így is írhatjuk

$$m\alpha+(m+2+3k)\varkappa.$$

Hogy ez nem egyezik az általunk kapott általános formulával, annak oka az, a mire mint különös esetre a II. fejezet 1. pontjának végén rámutattunk, hogy t. i. jelenleg $q=2$-t használva, Poincaré második szerkesztésénél felhasznált segéd rationális pontcsoport szintén rationális pontkettős.

Ha ezt tekintetbe veszszük, akkor mind megkapjuk az α rationális pontkettősből leszármaztatható rationális pontkettősöket. Ugyanis, ha két

$$m_1\alpha+(m_1+2+3k_1)\varkappa,\quad m_2\alpha_2+(m_2+2+3k_2)\varkappa$$

rationális pontkettősön adjungált kúpszeletet vezetünk keresztül a kimetszett rationális pontkettős argumentuma

$$m\alpha+(m+3k)\varkappa$$

alakú. Ha pedig két

$$m_1\alpha+(m_1+2+3k_1)\varkappa,\quad m_2\alpha+(m_2+3k_2)\varkappa$$

rationális pontkettősön vezetünk át adjungált kúpszeletet,

$$ma+(m+1+3k)\varkappa$$

alakú rationális pontkettőst kapunk. Ezen eljárással tehát megkapjuk az összes

$$na+m\varkappa$$

alakú rationális pontkettősöket, a hol n és m tetszőleges egész számok.

Ha $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ egymástól független (nem perspektiv) rationális pontkettősök, vagyis egyik a többiekből nem származtatható le, akkor belőlük azon rationális pontkettősök és csakis azok származtathatók le, melyeknek argumentumai

$$n_1\alpha_1+n_2\beta_1+n_3\gamma_1+\cdots+m\varkappa_1,$$
$$n_1\alpha_2+n_2\beta_2+n_3\gamma_2+\cdots+m\varkappa_1,$$

a hol $n_1, n_2, \ldots, m$ tetszőleges egész számok. Az

$$n_1=n_2=\cdots=m=0$$

esetnek megfelelnek a perspektiv rationális pontkettősök, az $n_1=n_2=\cdots=0$, $m \neq 0$ esetnek pedig a kettőspont érintői által kimetszett rationális pontkettősből leszármaztatható egyszeresen végtelen sok rationális pontkettős.

Ha az $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ k számú rationális pontkettősből a C görbén levő összes rationális pontkettősök leszármaztathatók, de a k számú rationális pontkettős egymásból nem származtatható le, akkor ezen pontkettősöket *primitiv* pontkettősöknek, számukat pedig a C görbe pontkettősei *rangszámának* nevezzük. Ez utóbbi szám rationális koefficiensű birationális transformatióra nézve nyilvánképen invariáns.

Megjegyzendő, hogy a primitiv rationális pontkettősök egyáltalában nem határozott rationális pontkettősök, mivel ha (α_1, α_2) primitiv rationális pontkettős, akkor $(\alpha_1+m\varkappa_1, \alpha_2+m\varkappa_2)$ vagy $(-\alpha_1+m\varkappa_1, -\alpha_2+m\varkappa_2)$ is lehet primitiv rationális pontkettős.

Szőkefalvi Nagy Gyula.

A HELYZETGEOMÉTRIA ÉS SZEREPE A MATHEMATIKÁBAN.[1]

[Megnyitó előadás, tartotta szerző az analytikai mechanika és égi mechanika tanszékének elfoglalásakor a *Collège de France*-on, 1909 május 18-ikán.]

Midőn e tanszéket elfoglalom, első szavaimmal mély hálámat akarom kifejezni mindazoknak, kiknek bizalmából e székre meghívattam: a *Collège de France* és az *Académie des Sciences* kitűnő tudósainak, kiknek választása rám esett, s a kormánynak, mely szíves volt választásukat helybenhagyni.

Hogyan mellőzhetném itt hallgatással Maurice Lévy úr nevét, kihez hálám különös kifejezését kell hogy intézzem. Azt a bizalmat, mely reám nézve oly mélyen megtisztelő, ő tanusította irántam legelőbb. Nem lehet elfelejtenem azt a már oly számos évet, melyeken át ő engem méltónak tartott arra, hogy egy feladatot teljesítsek, melynek ő oly fényesen tett eleget, hogy folytassam tanítását, melynek eltörölhetlen emlékét minden hallgatója őrzi.

Hozzá kell tennem, hogy ez a feladat, melyben nem láthattam mást, mint igen nagy megtiszteltetést, mindezeken felül reám nézve tudományos szempontból igen nagy haszonnal járt. A *Collège de France* tanítása, úgy azzal a terjedelemmel, melyet a legújabb felfedezéseknek szán, valamint azokkal az eredeti kutatásokkal, melyeket előidéz, azt a kettős majdnem paradox eredményt éri el, hogy mindig annak van hasznára, a ki előad, anélkül azonban — reméljük legalább — hogy nem lenne hasznos azoknak, kik az előadót hallgatják.

Arra a haszonra is gondolok, a melyet ezúttal nem csak nekem, hanem mindazoknak hajtottak, a kik ugyanezen tárgyakkal foglalkoztak, egyrészt Maurice Lévy úr mély dolgozatainak eredményei, a melyekre itt e helyen oly sokszor kellett hivatkoznom, másrészt azok a tanulságok, a melyek tudományos pályafutásából leszűrődnek.

---

[1] E fordítás a szerző szíves beleegyezésével jelenik meg.

Ezen tanulságok legfontosabbika talán az a szoros kapcsolat, a melynek a mathematika és alkalmazásai között kell fennállania, mely kapcsolat épp oly értékes az egyiknek, mint a másiknak — a mint már ki lett fejtve sokkal több auktoritással semmint én tehetném[1] — s a melynek megvalósítását részemről meg fogom kísérteni a mennyire erőmben áll.

Ezt a kapcsot már a doktorátus elnyerése czéljából benyújtott két dolgozatában lehet megtalálni: az egyik a hydrodynamikának van szentelve s ezen tudományra nézve fontos haladást jelent, a másik kezdetét jelölte a dolgozatok egy sorozatának, mely ismeretes mindazok előtt, kik érdeklődnek a felsőbb geométria és az orthogonális rendszerek annyira fontos tulajdonságai iránt. Kevéssel utóbb ezen dolgozatok egyikében váratlanul és reményen felül egyszerű alakra hozta azt a harmadrendű alapegyenletet, a melytől eme rendszerek alakja függ.

Akkor megnyilvánult kettős előszeretete azóta szüntelenül beigazolódott.

Ugyanaz a tudós, a ki az orthogonális rendszerek elméletéhez egy annyira lényeges adalékkal járult és a ki későbben a geodéziai vonalak problémájában az intergrábilitás eseteinek fölfedezésére egy módszert adott meg, mely számos mathematikus előtt ismeretes — kiket azóta Darboux úr előadásai beavattak a felületek elméletébe, — másrészt a rugalmasság tanát minden formájában: pálczák, lemezek, három méretű szilárd testekét alapvető eredményekkel gazdagította s egyidejűleg nevét reálisabb és kézzelfoghatóbb művekhez is fűzte, melyek közül némelyeknek fővárosunk mindennapi életében jutott helyük.

Talán épp a *Collège de France*-on talált Maurice Lévy úr alkalmat arra, hogy a legbensőbben egyesítse szellemének e kettős irányát, melynek törekvéseit el nem választani oly nagy fontossággal bir. Először is a mathematikai fizikáról tartott előadásaiban, melyekben Joseph Bertrand-t helyettesítette, nem átallotta itt egy-egy technikai módszert kifejteni azért, mert ez a módszer túlontúl kevéssé volt ismeretes Francziaországban és mert e kifejtésnek itt megvolt a maga fontossága. Ő neki köszönhető, hogy e falak közül, a tiszta tudomány e mentsvárából került ki az egyszerüsítésnek az a nagyszerű eszköze, a grafostatika, mindennapos használatra mérnökeink dolgozószobáiba. Az ő kezei között ez nem csupán az elemi statika egyenleteinek adott kényel-

[1] *H. Poincaré.* «Sur les rapports de l'Analyse pure et de la physique mathématique». Discours prononcé au Congrès des mathématiciens à Zürich (1897). (Math. Phys. Lapok 1898.) «La valeur de la science», p. 137 et suivantes.

mesebb alak volt; ő a rugalmasságról, sőt az anyagok ellenállásáról szóló legnehezebb theóriák tárgyalására alkalmazta azt. Ellenben nem akarta megengedni, — dacára annak, hogy volt rá néhány külföldi eredetű s éppen nem kicsinylendő példa — hogy tetszés szerint lehetne ezeket a különböző eredettel biró dolgokat összekeverni. Azt állította, hogy a problémákat gondosan kell osztályozni a szerint, a mint megoldásuk ezt vagy amazt a kategóriát kiemelte közülük. A logikától parancsolt ez a felosztás az eredményekbe mindazt a világosságot hozta, a melyet joggal várni lehetett. Ez onnét van — ellentétben azzal, a mi első tekintetre látszanék —, hogy logika és valóság semmikép sem két különböző dolog. Ha némelykor nincsenek összhangban, a hiba a rossz logikusokra háramlik, azokra, a kik nem veszik számba a probléma összes elemeit; és ha előáll annak kényszerűsége, hogy azokat az elemeket egyszerűsítsük, a melyeknek szövevényessége tulhaladja erőinket vagy a melyek közül néhányat rosszul ismerünk, — s ez volt épen az eset egy, sőt talán két elméletnél is, a melyek a grafostatikában szerepelnek — úgy éppen itt kell kényszerítő szükségszerűséggel közbelépnie a logikának, mert egyedül ő teszi lehetővé a tudománynak, a mennyiben ez nem tudná betölteni a hiányokat, hogy ezeket bevallja azzal a teljes őszinteséggel, mely szükéges ahhoz, hogy el ne árulja azt az igazságot, melyet hivatva van szolgálni.

Az égi mechanika, mely az analysis legmagasabb szempontjainak használatára és a realitással való legszorosabb érintkezésre egyszerre van utalva, tért kínált a szellem ama kettős tevékenysége számára, a mely szerintünk Maurice Lévy úr művét jellemzi.

Itt is egy erős hiányt kellett betöltenie. Az ár-apályok elmélete, miután egy Laplace reá sütötte szellemének bélyegét, Francziaországban az elhanyagolásnak volt kitéve, a mit ki lehet menteni — ha nem is igazolni — azokkal a nehézségekkel, a melyeket nyujt és következtetéseinek az észt kevésbbé kielégítő alakjával. Tisserand klasszikus nagy műve hallgatással mellőzi ezt az elméletet. Tanításunkban ennélfogva ismeretlenek maradtak azok a fontos kiegészítések, melyekkel lord Kelvin, Darwin és sok más angol kutató Laplace művéhez járultak. Két évi előadás ezen a tanszéken és egy kötetnyi munka mely amannak folytatását képezte, véget vetett a dolgok ezen állapotának és visszahelyezte a franczia tudományt arra a rangra, a melyet nem kellett volna elhagynia.

Ennek az annyira kiemelkedő munkának és tanításnak hány eszméje érdemelné még meg figyelmünket? De velem együtt kétségkivül önök is osztani fogják azt a véleményt, hogy Maurice Lévy úr tudományos munkásságának ecsetelését nem kell tovább folytatnom azért, mert ez a munkásság még egyre tart, a neki köszönhető szolgálatok listáját nem szükséges összeállítanom, mivel ez a lista még nincs befejezve, mivel az a tudós, a kinek már annyit köszönünk, holnap a tudomány, az ipar, a tanulás haladását fogja előbbre vinni, miután tegnap az elektromosság alkalmazásainak kongresszusán ily értelemben működött közre, hogy termékeny munkássága legújabb nyilvánulásának csak egyikét említsem.

*

Miután az a köteles tartózkodás, a melyből ha kilépnék önöknek zokon eshetne, nekem megtiltja, hogy a megnyitó előadás szokott keretein belül hosszasabban terjeszkedjem ki annak a mesternek munkásságára, kinek utódja lehetni szerencsém van, kötelességem lenne — úgy látszik — a tradiczió iránt tanúsítani bizonyos tiszteletet, lefestvén önöknek az analytikai mechanika és az égi mechanika tanszékének legalább a multját.

Sajnos még nagyon fiatal, semhogy története lehessen. Mindössze hetvennégy éves. Az emberi életben ez sok, sőt sokkal több, semmint számosan közülünk szeretnék. De intézmények számára ez bizony nagyon zsenge kor.

1862 előtt legfeljebb valami gyönge fonállal kapcsolhatjuk ahhoz a tanszékhez, melyet 1768-ig az asztronómia tanszékének neveztek, miután egészen addig a methematika tanszékének nevét viselte.

Ezen cím alatt nehéz neki egészen határozott individualitást tulajdonítani, hiszen többféle tanítást külömbség nélkül ugyanazzal a névvel illettek.

Rendes tanárainak sorában a XVII. században találjuk GASSENDI és ROBERVAL híres neveit, a kik mellett még DE LA HIRE-ét lehet elismerőleg említenünk, de be kell ismerni, hogy a következő században ez a sorozat kevésbbé fényes volt. Nemcsak hogy a D'ALEMBERT-ek és a CLAIRAUT-k nevei egyáltalán nem fordulnak elő benne, de kivéve JOSEPH DE L'ISLE-t, a tevékeny és ügyes asztronómust, oly nevekkel találkozunk, melyekhez részemről nem tudnék semmiféle nevezetes tudományos felfedezést fűzni. Föl lehet tennünk egyébiránt, hogy a tanároktól nem követelték, hogy nagyon vérbeli mathematikusok legyenek, a mennyiben valamelyikük zavarba ejtő könnyűséggel csapott át a mathematika tanításából a görögére.

GARNIER abbé volt ez, a kinek, mint tudva van, a *Collège de France* több fontos reformot köszön és a ki 1768-ban a tanszék új elnevezését eszközölte. Mindazonáltal úgy tetszik, hogy egy reorganizatorikus mozgalom már előbb is kezdett mutatkozni, miután 1760-ban, jóval mielőtt

Garnier a Collège tanácsosává lett, Lalande-nak tanárrá választásában nyert kifejezést.

Bármint legyen is, ez a választás a megujhodás napját jelöli, a melytől kezdve asztronómiai tanszékünk és a hozzáfűződő híres előadások és munkálatok történelme megérdemelné, hogy mint magának a tudomány történelmének fontos fejezete tárgyaltassék.

Hála Lalande fáradhatlan észlelői tevékenységének az asztronómia a *Collége de France*-on egy pillanatig sem szűnt meg előrehaladni oly korban, mely alapjában kevéssé kedvezett a türelmet igénylő kutatásoknak. Megfigyeléseink nagyrésze a forradalom korának legzavartabb napjaiba esik, a midőn mások egyszerűen boldogoknak tartották magukat azért, hogy »éltek«.

Örökségét dicsőségesen vette át Delambre, kinek első szárnypróbálgatásait az asztronómiai vizsgálatokban, melyek nála oly későn kezdődtek, de mégis szerencsésen indultak, maga Lalande bátorította. Delambre neve emlékezetünkbe hozza — s ez eleget mond — Laplace nagyszerű munkásságát, a mely hogy a theória birodalmáról a tényekére terelődött ő járult hozzá oly nagy mérvben, sőt magának a méterrendszer megalapítását is, melynek az ő munkái képezik egyik legfőbb bázisát.

Ha talán a harmadik birtokos, Binet, nem is töltötte be az asztronómia tanszékét oly fénynyel mint két elődje, mégis tiszteletre méltó nevet s felfedezéseket hagyott hátra a mathematika főbb ágaiban. Különben gondja volt rá, hogy attól kezdve, hogy megszűnt tanítani, méltó helyettesei legyenek, a mennyiben ezek Puiseux és Ossian Bonnet voltak. Az előbbinek javára voltak írva nem csak azok a csodálatra méltó, már régóta klasszikus eredmények, melyek az algebrai függvényekre vonatkoztak; ő már előzőleg megindította azt a szép asztronómiai karriért, mely ő reá várakozott, két nevezetes értekezéssel *a bolygók elliptikus mozgásának elméletében fellépő sorok összetartásáról*, melyekben Cauchy nézeteit kiegészítette.

Ellenben Ossian Bonnet abban az időben még nem tett közzé semmiféle asztronómiai dolgozatot sem. Binet és vele a *Collége* híven egy szemponthoz, a mely ezuttal, mint annyiszor másszor, a tudománynak előnyére vált, nem követelték attól, kit Gauss után az infinitezimális geométria megalapítójának lehet tekinteni, hogy már előre is speciálista legyen a tőle előadandó tanítás czímén.

De a helyettesítés nem sokáig húzódott. Az 1856. évben bekövetkezett Binet halála s vele az asztronómia tanszékeé.

Még azt sem lehet mondani, hogy kimulásakor gyermeke látott napvilágot, mert halálakor semmisem jött a világra. A kormány, különféle érdekeket viselve szívén, azzal volt elfoglalva, hogy Binet lakásába találjon helyettest — abban a boldog időben t. i. a *Collége de France*-on a tanárok számára néhány hálószoba állott rendelkezésre — de nem az ő tanítására.

A tanári testület kérelmei dacára egészen 1861-ig vár, míg elrendelte annak a tanszéknek a megszüntetését, a mely már öt év óta nem létezett és egyúttal egy új tanszék létesítését, a melyre közvetlenül SERRET-t hívta meg.

Meg van tehát engedve a habozás arra a kapcsolatra vonatkozólag, a mely fönnállhat az eltünt tanszék és az égi mechanika tanszéke között, a melyet ez a rendelet hívott életbe. Látni lehet, hogy az utóbbi tanszéknek alig van valamelyes köze a multhoz.

Még MAURICE LÉVY jövetele előtt, ki SERRET közvetlen utódja volt, a jelen küszöbét JORDAN úrral lépi át, ki mint az első rendes tanárnak több éven át helyettese, ebbe a tanításba belevitte azt a magas tudományos inspirácziót, a melyet mindnyájan ismerünk.

Reám hárul a súlyos tisztség egyenesen az ő örökükbe lépni.

A hisztorikus feladatára tehát, úgy látszik, még nem érkezett el az idő.

Bevalljam-e, hogy én ezért csak félig haragszom? Nem lehetne állítani, — itt kevésbbé, mint akárhol másutt — hogy ez a feladat nem fér össze a tudósével, de nem titkolhatom el magam előtt, hogy a magam részéről nem voltam egészen megnyugodva, mikor hozzáfogtam és úgy éreztem, hogy rosszul vagyok elkészülve ahhoz, hogy teljesítsem. Van egy latin közmondás vargákról, kik más dolgokba is akarnak avatkozni czipőtalpakon és szögeken kívül és én attól tartok, hogy azt jogos szigorral rám is lehet alkalmazni. Ki tudja, hogy nem-e követtem már el néhány igazságtalanságot, a mikor oly területet akartam bitorolni, a mely nem az enyém.

*

Tehát a tudomány az, a melyről önökhöz végre beszélni akarok. Ma arra fogok szorítkozni, hogy egy szerény munkatársáról szóljak, a melynek segítségét gyakran kell majd igénybe vennem — nem most először — abban a tanulmányban, a melyet önökkel végezni szándékozom.

Valamelyik azon tudósok közül, kiknek barátságát reám nézve a legnagyobb megtiszteltetésnek tartom, egy nap azt mondta nekem, hogy MOLIÈRE-ben csak egy kifogásolható helyet talált, azt t. i., hol CÉLIMÈNE egy hórihorgas vicomteról beszél, «a ki nem tudna neki tetszeni a mióta őt látta, a mint három negyedórán át egy kútba köpködött, hogy gyűrűket csináljon». A lángészhez méltatlannak találta ezt a megvetést egy időtöltés iránt, mely kétségkívül a rezgéstünemények első képét szolgáltatta a fizikának.

A nélkül hogy tovább firtatnók vajjon Célimène mellett nem szól-e legalább is a bakteriológia meg a hygiénia, szabad elgondolnunk, hogy az ő megvetése nem tette volna fölöslegessé Euler munkáit, ha azoknak néhány helyét elolvashatta volna. Az «*Introductio in analysin infinitorum*» halhatatlan szerzője nem restelli kutatni — más nála szűkebb látkörű mathematikusokkal egyetemben — az utakat, a melyeket a huszár a sakktáblán megtehet oly módon, hogy annak valamennyi mezejét érintse a nélkül, hogy kétszer térne vissza ugyanarra a mezőre. Máskor meg látjuk, a mint hosszú ideig — de eredménytelenül — azzal foglalkozik, hogy 6 különböző ezredhez tartozó, 6 különböző ranggal biró 36 tisztet egy négyzetben akként rendezzen el, hogy minden vízszintes vagy függőleges vonalon mind a 6 rang és mind a 6 ezred képviselve legyen. Mikor ilyenféléket olvasunk, valami különös meglepődést érzünk azon — legalább az első pillanatban — hogy Euler életéből egy óra efféle haszontalanságokra pazarlódott.

És ha nem foglalkozott volna ezekkel és más ugyanolyan rangú problémákkal, bizonyára a következőt sem méltatta volna arra, hogy vele törődjék, a mely egy pillanatig figyelmünket igénybe fogja venni.

Königsberg városa a Pregel torkolatánál épült. A folyó partjai és a benne lévő szigetek közt hét híd van elrendezve. A probléma az, hogy a városon keresztül tett séta alkalmával át kell menni valamennyi hídon, de mindegyiket csak egyszer szabad érinteni.

Egyébiránt Euler megmutatja, hogy lehetetlen ezeknek a föltételeknek eleget tenni.

Mindenkinek szabadságában áll, hogy ezt a kérdést ne vegye komolyabban, mint az előzőket. A különbség mindenesetre az, hogy ezúttal geométriáról van szó; de oly geométriáról, melyet Pascal nem nevezett volna ezen a néven abban a pillanatban, mikor atyja neki azt magyarázta, hogy «a geométria a pontos idomok szerkesztésének és a köztük fönnálló arányok megtalálásának művészete».

Csakugyan, szó sincs ennek a rajznak a pontosságáról, sem arányairól. Fölrajzoltam itt úgy a hogy a Pregel medrét; de legyen ez a meder egyenes vagy öblös, a szigetek köralakúak vagy oválisak, a hidak egyenesek vagy görbék, a probléma ugyanaz marad, föltéve, hogy a hidak száma ugyanaz és hogy ugyanazokat a szigeteket kötik össze. Egyszóval, ha ezt a rajzot tetszőleges módon eltorzítjuk, föltéve, hogy nem választjuk szét, a mi rajta egyesítve van és hogy nem egyesítjük a mi rajta külön van válva, a kérdés változatlanul ugyanaz marad. És éppen a rajzon eszközölt deformációkkal szemben tanúsított függetlenségnek ez a karaktere az, a mely engem érdekelni fog: a geométria ama problémái, melyek ezzel a karakterrel birnak, alkotják a *helyzet geométriáját* (analysis situs) vagy *topologiát*, s ennek akarom ezt az előadást szentelni.

*

A helyzet-geométriát, melynek ilyetén első feltűnését EULER irataiban az imént láttuk, utána is szüntelenül művelték és nemsokára külön tankönyveket szenteltek neki.

Az egész mathematikai tudomány fejlődésének szempontjából való fontossága azonban nem tűnt ki előbb, mint a XIX. század közepén RIEMANN műve nyomán.

Legyen szabad itt egy szóval megemlítenem, hogy miben áll e mű abból a szempontból, melyet elfoglalunk.

CAUCHY az analysisről való ismereteinkben ép véghezvitte azt a nagy evolucziót, a melynek neve a függvények általános elmélete. Ő megmutatta, hogy a mathematikában addig bevezetett összes függvények sajátságai egyetlen forrásból fakadnak, ha a helyett, hogy kizárólagosan a változók valós értékeire lennénk tekintettel, az imaginárius értékeket vezetjük be: a geométria nyelvén szólva, ha a pontnak az egyenes vonalon történő helyváltozásai helyett, a pontnak a síkon végbemenő helyváltozásait veszszük szemügy alá.

Ezen hatalmas módszer alkalmazására a legegyszerűbb példát az algebrai függvények szolgáltatták.

Első tekintetre úgy látszik, hogy az új elmélet tökéletesen ráillik erre a példára. Nyilvánvalóan úgy is van, a míg meg nem közelítjük a síknak oly pontjait, melyekben a függvény kivételes viselkedést mutat, más szóval a szinguláris pontokat. De épen ezt a hiányt pótolják PUISEUX munkálatai, melyekről fönnebb megemlékeztünk és melyek a függvénynek a szinguláris pont környezetében való viselkedéséről oly pontos módon adnak számot, mint más módszerek arról, a mi egy közönséges pont körül megyen végbe.

Mindezek daczára CAUCHY függvény-elmélete az algebrai függvények természetére nem deríti azt a fényt, a melyet várni lehetett volna s a melyet, hogy csakugyan szolgáltathat, a későbbiek folyamán tűnt ki. Úgy látszik, hogy egy lényeges elem siklik ki előle, melyet az algebrai függvényekről és görbékről fölvethető minden fontos problémában szükséges tekintetbe venni. Akár a geométriát tanulmányozzuk egy ilyen görbén, akár a koordináták kifejezését segédváltozók függvényeiben, mindenütt egy és ugyanaz az egész szám lép fel, a görbe génusza; és az az elmélet, a melyre ép az előbb céloztunk, nem engedi meg, hogy ennek fellépését előre lássuk.

Mi hiányzik tehát ehhez az elmélethez, hogy a jelen esetben alkalmas legyen a kitűzött cél elérésére?

Riemann először is megjegyzi, hogy a sík, a mint eddig tekintették, még nem adja eléggé hű képét a kikutatandó tartománynak, miután a sík egy pontjának az adott görbének több pontja felel meg. A síkot ő széthasítja több egymás fölött elterülő lapra s ekként rátalál arra a felületre, a mely az ő nevét viseli: a felület minden egyes pontjának ezúttal csak egyetlen egy számadata felel meg azoknak a mennyiségeknek, melyeknek változását vizsgáljuk.

De ugyanazt az eredményt úgy is elérhette volna, ha felületét akárminő más módon állítja elő. Képzeljük, hogy a megszerkesztett felületet tetszőleges módon deformáljuk: föltéve, hogy ez a deformáció tökéletesen folytonos, föltéve, hogy sem szakadás, sem összeforradás nem jár nyomában, az új felület, a melyet belőle nyerünk tökéletesen ugyanazokra a szolgálatokra lesz alkalmas, mint a régi.

Ekként reátereltetünk annak megvizsgálására, hogy ilyféle deformációval mit lehet egy felületből csinálni, vágyis inkább hogy mit nem lehet belőle csinálni; hogy miről ismerjük meg, vajjon két felület ezen az úton áttranszformálható-e egyáltalán egymásba vagy sem; egyszóval rávezettetünk arra, hogy a felületeket a helyzet-geométria szempontjából tanulmányozzuk.

Nem hiszem, hogy Riemann ezen felfedezése óta bárki tanulmányozhatta volna ezt a geométriát, anélkül, hogy meg ne lepődött volna rendkívüli egyszerűségén, azon a mi benne szinte gyermekes.

Adott négyszöget sarkainak folytonos legömbölyitésével körré lehet átalakítani. De henger-alakú csövön hasonló transzformácziót nem lehet közvetlenül véghezvinni: a csövet előbb hosszában szét kell vágni s azután négyszögbe szétfejteni. Gömbalakú burkolat ismét különbözik az előbbi felületektől, mert míg ezeknek van határvonaluk, addig a gömb önmagában zárt és nem vezethető vissza rájuk másképpen, mint úgy, hogy egy tetszés szerinti pontja körül kis körlapocskát kezdünk leválasztani. De ez ismét elégtelen volna, ha a gömbfelületet egy fogantyúval láttuk volna el vagy a mi ugyanaz, ha a gömböt gyűrűvel helyettesítettük volna. Akkor először keresztbe kellene átmetszeni a gyűrűt vagy a fogantyút, hogy ily módon hengeres csővé egyenesíthessük ki, azután ezt, mint az előbb, egy második harántmetszettel kellene behasítani. Négy, hat, nyolcz metszet lenne szükséges, ha a gömbnek két, három, illetve négy fogantyúja volna.

Ezek ugyancsak gyermekes észrevételek és hallattukra nem találunk okot, hogy miért tulajdonítsunk nekik több jelentőséget, mint annak a megoldásnak, melyet EULER a königsbergi hidak problémájáról adott, vagy a melyet a 36 tiszt problémájáról keresett.

A mi azonban bizonyos, ez az, hogy ezek az észrevételek voltak azok és egyedül ők, a melyek egész RIEMANN-ig, az algebrai függvények elméletéhez hiányoztak. Az ABEL-féle integrálok osztályozása, ezen integrálok periodusai, biracionális transzformációk, mind amaz észrevételek alkalmazásából következnek, nem ugyanazzal az evidenciával, a mely DESCARTES számára a bizonyosság jelét képezi, hanem azzal a túlevidenciával — hogy egy kissé barbár szót használjak — melynek következtében kérdés és felelet teljesen egybeolvadnak. A mi a génuszt illeti, az nem más, mint maga a RIEMANN féle *felület-génusza*, azaz ama fogantyúk száma, a melyekkel ez a kellőképen deformált felület bir; például zérus-génuszú csak akkor lesz, ha a RIEMANN-féle felület maga zérusgénuszú, azaz ha gömbbé deformálható.

Ilyféle példán a mathematikusoknak ép úgy okulniok kellett volna, mint meglepődniök. Bizonyára jobban értették volna meg jelentését, ha nem értettek volna félre egy másik, néhány évvel idősebb tényt.

Ennek történetét még EULER-re vezetik vissza, kitől elneveztek egy relációt (melyet egyébként már DESCARTES jelentett ki), mely egy poliéder elemei között áll fönn. Ha megszámoljuk azoknak a sík lapoknak a számát, a melyek egy szilárd testet határolhatnak, az élek számát, a melyek mentén egymást metszik és a csúcsokét, a melyben az élek összefutnak, akkor, a mint EULER kimondja s bizonyítás hiányában a szokásos példákon igazolja, a lapok és csúcsok számának összege kettővel nagyobb az élek számánál.

Példa: a kockának hat lapja van, nyolc csúcsa és tizenkét éle $(8 + 6 = 12 + 2)$,

CAUCHY első munkáinak egyike egy értekezés volt, amely 1813-ban jelent meg és a mely a poliéderek geometriai vizsgálatának volt szentelve. CAUCHY LEGENDRE szerint ezt EULER tételének bizonyításával kezdi.

De EULER verifikációi és CAUCHY okoskodása alapjukban véve speciális poliéderekre vonatkoznak, a valóságban pedig EULER tétele hamis. Ha azon testeknek, a melyekre az első pillanatban gondolunk, egyike sem teszi evidenssé helytelenségét, ez azért van, mert egyiküknek sincsenek olyan fogantyúi, a milyenekről az imént beszéltünk. Egészen másképpen áll a dolog, ha ily fogantyúk léteznek, gyűrűs felületeknél például. Vegyünk három hasábalakú pálczát és egyesítsük őket egy háromszöggé.

Ilyféle testnél a lapok és csúcsok számának összege nem lesz nagyobb, mint az élek számáé, hanem vele épen egyenlő. Ha most a testnek két foganytyúja volna — a mit úgy lehetne például elérni, hogy a test egyik lapjához egy hasonló testet ragasztanánk — akkor a lapok és csúcsok számának összege kisebb lesz (két egységgel) az élek számánál.

A mint látjuk, CAUCHY nemcsak félre engedte magát vezettetni EULER példájától, de a hiány is, melyet betöltetlenül hagyott, ugyanabban az okban gyökerezett, a mely tollát megakadályozta az algebrai függvények elméletének kifejtésében, úgy hogy fölvethetjük azt a kérdést, vajjon utódjának hagyta-e volna azt a dicsőséget, hogy ezen elmélet végleges alapjait megvesse, ha egy egyszerű elemi geométriai kérdésről tökéletesebb nézettel birt volna.

*

De bármilyen találó is legyen az a lecke, a mely RIEMANN felfedezéséből leszűrődik, ez a lecke hiábavaló volt. Azt lehet mondani, hogy az maradt egészen POINCARÉ úr munkálataiig. A mathematikusok fel tudták használni RIEMANN módszerét arra a speciális tárgyra, a melynek céljaira ő azt megteremtette, de ők nem kérdezték maguktól, hogy nem talál-e alkalmazást még más körülmények között is, hogy nincsen-e valamely általánosabb hordereje.

Ez az általános horderő egy, az előbbinél még egyszerűbb példán fog szembetünni.

Legyen adva két pont, P és Q, a melyek közül mindegyik egy egyenesen mozoghat; föltesszük, hogy a második pontnak, Q-nek helyzetét megadja a P pont helyzete, úgy hogy ha az utóbbi adva van, akkor már ezáltal a Q helyzete magától teljesen meg legyen határozva. Viszont ha a Q pont helyzete van megadva, lehet-e ebből a P pont megfelelő helyzetét kétértelműség nélkül levezetni?

Erre a kérdésre meg lehet felelni, ha a P pont folytonosan egy határozott irányban változtatja helyzetét, például balról jobb felé, akkor a Q pont is állandóan balról jobbfelé mozog és pedig folytonosan. Tegyük fel, hogy ez így van addig, a míg a P pont az ő egyenesén az AA' szegmentumot befutja és nevezzük B és B'-nek a Q pont azon helyzeteit, a melyek A és A'-nak megfelelnek. A BB' szegmentumon fölvett minden Q pontnak megfelel a P-nek egy és csakis egy helyzete az AA' szegmentumon.

Ennek a következtetésnek a kimondásához nekünk elég lett volna tehát a Q pontnak a P pontéhoz viszonyított elmozdulásának *deriváltját* tanulmányoznunk, azaz a mozgásra való momentán törekvést, melyet a második pontnál az elsőnek elmozdulása minden pillanatban előidéz. Ez a tanulmány az infinitezimális számítás körébe vág és innét van azután az, hogy az utóbbi szolgáltatja azt az alapot, melyen az előző kérdés megoldása nyugszik, a mi elvégre nem más, mint egy legáltalánosabb, egy ismeretlennel biró egyenlet megoldása.

Természetes lenne ennek a hatalmas módszernek kiterjesztését egyenlet-rendszerekre is megkisérteni.

Tegyük fel például, hogy a P és Q pontok többé nem egy egyenesen, hanem egy adott síkban mozoghatnak. Ismét feltesszük, hogy a Q pont helyzete függ a P pontétól és általa van meghatározva. Képzeljük el viszont, hogy Q legyen adva s kérdezzük, hogy ez az adat mily mértékben teszi ismeretessé a megfelelő P pontot.

Akkor négy derivált létezik, melyek hasonlók ahhoz, a mely az előbbi problémában fellépett. Ha egy tetszőleges P pontban ez a négy derivált adva van, akkor minden igen kicsiny elmozduláshoz, a melynek P-t alávetjük, ismeretes az az elmozdulás, melyet Q pont fölvenni igyekszik. Ha ennek a négy deriváltnak egy kombinácziója — a függvénydetermináns — nem zérus, akkor a P-től leírt területnek egy hasonló alakú, Q-tól leírt kis terület fog megfelelni és ha a P pont síkjában két ilyenféle kis területet veszünk szemügyre, a melyek közül az egyik a másikon kívül fekszik, de határvonaluk egy részében érintkeznek, akkor a Q pont síkjában a nekik megfelelő területek szintén érintkeznek és az egyik a másikon kivül esik: azaz nem fogják egymást fedni.

Gyakran azt hitték, hogy ebből az vezethető le, hogy ha a dolog ilyképen lenne minden helyzet körül, a melyet a P pontnak egy bizonyos S területen belül adni lehet, akkor ennek a Q pont síkjában egy T területnek kellene megfelelnie, a melyeknek különböző részei sohasem fedik egymást kölcsönösen; ha ez így van, akkor a T minden Q pontjának az S-ben egy és csak egy P pont felel meg.

Csakhogy ez a következtetés téves: az a födés, mely sohasem áll elő a T-hez közvetlenül szomszédos két rész között, igenis bekövetkezhetik két, egymástól távol eső rész között.

De sem az egyenesek nem az egyedüli vonalak, sem a síkok nem az egyedüli felületek, melyeket a mi pontjainkkal leirathatunk. Különösen elképzelhetjük azt, hogy a vonalak vagy felületek *zártak,* a helyett, hogy határtalanok lennének, mint az egyenesek vagy a síkok.

Tegyük fel, hogy a P és Q pontok mindegyike egy gömbön mozoghasson és engedjük meg azonfelül, hogy ha a P pontnak egy határozott helyzetét kijelöljük, akkor ezáltal egyszersmind a Q pont helyzete is meg legyen határozva.

Azt találjuk, hogy az iménti téves következtetés a jelen esetben exakttá lesz. Ha a differencziál-számítás proczesszusai lehetővé tették annak megállapítását, hogy az első gömbön levő P pont közvetlen környezetének a második gömbön egy hasonló alakzat felel meg, a melynek részei egymást kölcsönösen nem fedik; ha ezt a megállapítást *kivétel nélkül* az összes helyzetekre nézve eszközöltük, a melyeket a P pont a gömbön elfoglalhat, — akkor ugyanez a tulajdonság az egész gömbfelületen is fennáll, azaz a második gömbnek minden Q pontját az elsőnek egy és csakis egy P pontja szolgáltatja.

De óvakodnunk kellene attól, hogy ezt az eredményt a zárt felületek minden lehető fajára kiterjesszük. Két gömb helyett tekintsünk két gyűrűalakú felületet, két körgyűrűt. Itt is előfordulhatna, hogy az első gyűrű egy P pontjának egy teljesen meghatározott Q pont feleljen meg a másodikon, hogy a Q-től leirt két szomszédos alak sohasem fedi egymást, ha a P ponttól leírt megfelelő alakok nem fedték egymást és hogy mégis a Q pontnak egy és ugyanazon helyzetét a P-nek két vagy több helyzete szolgáltathatja.

Egyébiránt figyelemre méltó, hogy tökéletesen így van a dolog a *zárt* vonalak esetében is, két körnél például. Az óramutató minden helyzetének a perczmutatónak egy teljesen meghatározott helyzete felel meg, miközben a két mutató vége két kört írt le és mikor az óramutató egy határozott értelemben elmozdul, ugyanaz történik a perczmutatóval is. Csakhogy mialatt az óramutató vége az ő körét egyszer befutja, addig a perczmutató tizenkétszer fordul meg az ő körén: az utóbbi egy és ugyanazon helyének az előbbinek tizenkét különböző helyzete fog megfelelni.

Ennek a ténynek oka ugyanaz, akár zárt görbékről, akár gyűrűs felületekről legyen szó. Ha egy görbén adva van két pont P és P_1, akkor az egyiktől a másikhoz kétféle úton mehetünk, a szerint, a mint egyikén vagy másikán haladunk annak a két ívnek, a melyekre a két adott pont a görbét felosztja, sőt végtelenül sokféle módon mehetünk az egyik ponttól a másikhoz, ha P-ből kiindulva egy vagy több fordulatot szabad tennünk, mielőtt P_1-ben megállunk. Mivel arra, hogy egy gyűrűs felület egyik pontjából egy másikhoz érkezzünk, ugyancsak számtalan, lényegesen különböző út létezik, a melyek nem vezethetők át egymásba folytonosan (például a gyűrű körül megtett fordulatok száma szerint), azért előbbi tételünk hamis a felület számára, míg a gömbre nézve ellenben igaz. Valóban ez utóbbin az összes utak, a melyeket két adott pont között húzhatunk, ekvivalensek: másszóval a gömbre helyezett, önmagába záródó fonál mindig úgy gombolyítható össze, hogy teljességében egy pont körül csavarodjék, a nélkül, hogy ezalatt a gömbtől eltávoznék.

Ez az elemi példa megmutatja nekünk, talán még jobban, mint az algebrai függvényeké, az okokat, a melyek miatt a Riemann-tól fölállított alapelvek, mint szükséges dolgok jelennek meg.

Az algebra után két új módszer, az analitikai geométria és az infinitezimális számítás tették lehetővé a modern mathematikának azt, hogy túlmenjen azon a területen, a melyet a görög tudomány oly jól kikutatott, de a melyet el nem hagyhatott. Az analitikai geométria egy közös elméletre vezette vissza az összes geométriai problémákat, a melyeket a görögök fölállították s még számtalan mást is, úgy hogy egy és ugyanaz a módszer egyesítette nemcsak a kúpszeletek tanát, nemcsak annak a néhány görbéét, a melyeket a régiek egyenként még amazokhoz csatoltak, hanem valamennyi más algebrai görbéét is, a melyeket ők nem is sejtettek és a melyek az előbbieknek természetes általánosítását képezték és még a transzcendens görbékét is. Ezen egység megvalósításához elégséges, ha az alakzatok között való relációk tanulmányozását rendszeresen számok közötti relációk tanulmányozásával helyettesítjük.

De viszont ezt nem lehetett volna valami nagyon kiterjeszteni amaz egyszerűsítés nélkül, a melyet az infinitezimális számítás érlelt meg. Ennek az egyszerűsítésnek kettős oka van. Egyrészt a függvények, vagy a geométria nyelvén szólva, az addig tanulmányozott legkülönfélébb görbék feltünő hasonlatosságot mutattak a végtelen kicsiny tartományában, a hol tulajdonságaik rendkívül egyszerűekké válnak. Másrészt sok esetben lehetséges ezen infinitezimális tulajdonságokról visszamenni azokra, a melyekkel a kérdéses függvények vagy görbék a véges tartományban bírnak.

De exaktak voltak-e minden pontban ezek az annyira termékeny módszerek? Alkalmazzuk őket a felületekre, mivel ép ezekkel kezdtünk foglalkozni.

Az analitikai geométria számára egy S felületen mozgó pont két számtól függ. Az S-en egy pontot úgy határozunk meg, hogy megadjuk ennek a két számnak vagy *görbevonalú koordinátának* az értékét és minden kérdés, a mely az e felületen való geométriára vonatkozik, átfordítható oly kérdésre, a mely a két koordinátának egyidejű vagy független változásával van vonatkozásban.

A gömbön például ez a két koordináta a hosszúság és a szélesség lesz és valóban az ekként definiált koordináták általában megengedik az analizis alaptételeinek direkt alkalmazását a gömb egy tetszőleges tartományában való geométriai kérdésekre. De kivételt kell tenni a gömb két különleges pontja: a pólusok számára.

De nemcsak hogy ez így van, hanem fontos megjegyeznünk azt, hogy a görbevonalú koordinátáknak semmiféle más választása nem engedné meg egy hasonló szingularitás kikerülését: ennek a gömbnek minden egyéb ábrázolása olyan lenne, mint az előző, a felület egyik vagy másik pontjában meghiusulna.

Valóban, a mi megfelel két oly szám rendszerének, a melyek egymástól függetlenül az értékek egész határtalan sorozatát vehetik fel, az egy sík vagy egy síkalakú felület, a mely következőleg maga is határtalan.

A mi két oly szám rendszerének felel meg, melyek csak véges határok között változhatnak, mint például a gömbön a hosszúság és a szélesség, az lehet zárt felület, de ebben az esetben ez a felület bizonyosan nem lesz gömbalakú: szükségképen oly felület lesz, a melynek egy fogantyúja van, mint az a felület, a melyről az imént beszéltünk.

Az analitikai geométria klasszikus szempontja szigorúan helyes lehet, a míg a gömb egy részének ábrázolásáról van szó; de nem lehet az egy egész gömbre nézve.

Az, hogy ez a tény fennáll, bármilyen legyen is a választott koordináta-rendszer, kell hogy figyelmeztessen bennünket arra, miszerint itt nem véletlen tüneménynyel van dolgunk.

Annál inkább állanak hasonló megjegyzések, ha az infinitezimális számítás alkalmazására térünk át.

Ez a megvizsgálandó tartomány egy kicsiny részének ismeretét veszi alapul. Ezen kis töredék mellé csatolunk hasonló szomszédos töredékeket; így minden egyes részecske ismeretéből levezetjük az egészét, épúgy, a hogy Francziaország mappája a vezérkari térképlapokból van összetéve.

Teljesen így jár el az integrál-számítás és ez az eljárásmód a függvénytanban, bár rendszeresítését Weierstrass vitte tetőpontra, nem kevésbé Cauchynál is előtérbe nyomul, mihelyt szinguláris pontok lépnek fel.

De az imént láttuk, hogy problémák, a melyek egy tartománynak tetszésszerinti, elegendően kicsiny részében egyformán viselkednek, az egész tartományra nézve teljesen különbözhetnek.

Másszóval nem elégséges a térkép különböző lapjait tanulmányoznunk, a tanulmányt az összképre is ki kell terjesztenünk s ezt az összképet több, egymástól lényegesen különböző módon lehet előállítani.

Ekként azok a hatalmas eszközök, a melyek az analizisnek és a geométriának azt a nagy fejlődését előidézték, a melynek Descartes, Newton és Leibnitz óta indultak, bármily nagyszerűek voltak is, mégis ugyanabban a gyöngében szenvedtek. Az alakzatok ábrázolása számokkal, végtelen kicsiny elemekre való szétbontásuk bizonyára élénk világosságot áraszt azokra a problémákra, a melyeket ezen alakzatokra nézve fölvethetünk; mindazonáltal egy lényeges tulajdonságukat eltakarják.

Az utóbbinak befolyása egyébiránt többé vagy kevésbé döntő lehet; a módosítások, a melyeket az eredményekben maga után von, többé vagy kevésbé fontosak és ezen fontosságra nézve valami kétséget tarthatunk fenn. De ily kétség többé nincs megengedve. Találkoztunk egy példával, a melynél ezek a módosítások gyökeresek és abszolutak, a hol a topologiai tulajdonságok önmagukban véve elégségesek arra, hogy a megoldást teljesen megváltoztassák, egyébiránt minden más tulajdonságra nézve tökéletes egyenlőséget hagyva fenn. Riemann óta különben azt is tudjuk, hogy ez a geométriai elem, a mely nélkül az analizisből összegyüjtött anyagok szintézise az eltévedés veszélyének van kitéve, nem kevésbé alapvető szerepet játszik az algebrai függvények tanulmányozásában.

*

Az a geométria, a mely Descartes óta a számok fönnhatósága alá volt vetve, ekként elégtételt szerzett magának, ugyan nem azzal, a mint többször megkisérelte, hogy oly kérdésekkel foglalatoskodott, a melyeket a számítás a jogosság némi látszatával megvetett, sem azzal, hogy különböző formákba öntötte — ha mindjárt egyszerűbbek voltak is — az okoskodásokat, a melyeket az analizis a maga részéről az ő saját nyelvén magyaráz, hanem azzal, hogy egy fogalommal gazdagította, a mely az ő sajátja s a mely Descartes felfedezésében nem volt bennfoglalva. Másrészt természetesen az a kérdés vetődött fel, hogy ez az új fogalom egyáltalában visszavezethetetlen-e analitikai elemekre.

A kérdést annyival is inkább föl kellett vetni, mert a számokra való visszavezetés ma már nem a fölfedezés eszköze többé, hanem mintegy logikai kényszerűség. A modern mathematika nem tartja Pascal-lal azt, hogy: «mindenben, a mi végbemegy, geométria megy végbe», hanem azt mondja, hogy «mindenben, a mi végbe megy, arithmetika megy végbe».

A mi az elvet illeti, a melyből a helyzet-geométria fakad, úgy ezt az arra való visszavezetést Jordan úr szép munkáinak köszönjük. Az ő bizonyítása óta mindezeket a fogalmakat kétségen kívül kissé fáradságosan talán, de mégis meg lehetne értetni egy oly intelligenciával, mely úgy képes okoskodni, mint mi, de a mely előtt egyébiránt a kiterjedtség minden érzete és ideája teljesen idegen.

Csakhogy én nem hiszem, hogy egy ily intelligencia könnyen eljuthatott volna ezek fölfedezéséhez. Ennek bizonyításakép csak azokra a nehéz levezetésekre hivatkozom, a melyekre Jordan úrnak támaszkodnia kellett, hogy fölállíthasson egy első szempillantásra mindenki előtt evidens tételt, a mely levezetések jogosan érdemelték ki a csodálatot, de a melyeket azóta sok erőfeszítés dacára is csak keveset sikerült tökéletesíteni.

Ha tehát azok a fogalmak, a melyekről beszélünk, ma a geométria segítsége nélkül is rekonstruálhatók, úgy a helyzet-geométria az, mely azokat létrehozta és nekünk oly forma alatt nyujtja, a mely értelmünk szükségleteihez legjobban alkalmazkodik.

Az előző elmélkedések után már kevésbé leszünk hajlandók EULER-t szemrehányásokkal illetni azért, mert óriási munkáinak néhány lapját oly kis vázlatoknak szentelte, a minőket az imént önök előtt hevenyésztem. Ép úgy nem szabad szemére hányni azt a fáradságot sem, a melyet a permutációk más kicsiny játékaira pazarolt, a mint néhány példában szintén említettem. Egy ilyenfajta játék a csoport-elmélet nevét viseli: ez ma uralja és egymás között egyesíti a modern algebra és analizis legfontosabb és legkülönbözőbb részeit.

Azonban ne essünk túlzásokba és kerüljük ki azoknak a paradoxonjait, a kik minden fölfedezésre túlolcsón találnak nem sejtett és hipothetikus előfutárokat. Vannak permutációk és permutációk, van topologia és topologia. EULER maga és számos utódja egy csomó hasonló kérdést tárgyalt, a melyek a mathematikai mulatságok gyüjteményeiben találnak helyet és nincs is alkalmuk, hogy onnét kilépjenek. Egyedül annak, a melyet RIEMANN vetett föl, van az a hordereje, a melyet neki az előzőkben tulajdonítottunk. Ennek a kérdésnek a föltevése volt a fontos, nem pedig a többieké.

Ne írjuk tehát EULER javára — ki úgyis elég gazdag, semhogy kölcsönre szorulna — annak a fölfedezésnek a dicsőségét, a mely most foglalkoztat bennünket, épúgy, mint száz más permutáció-probléma, a melyek a tudomány fejlődésére nem gyakoroltak befolyást, sem tudná elragadni LAGRANGE-tól, ABEL-től, vagy a mi halhatatlan GALOIS-nktól a csoport-elmélet felfedezését. Legföljebb azt lehetne kérdezni, hogy pl. RIEMANN szellemét nem-e egy ahhoz hasonló probléma vezette, a mely előtte fölvetődött azon, már megszerzett ideánál fogva, hogy helyzetgeométriai kérdések létezhetnek. Ily befolyás létezhetett; de hogyan tehetjük fel, hogy szükséges is volt, mikor — a mint tudjuk — az eszmemenetnek, a melyet fölébreszthetett volna, más kiindulópontja volt, a melyből szükségszerűen fakad?

Talán a jövő a RIEMANN-éitől különböző, más topologiai kérdéseket fog előttünk fölvetni. De miután fontosságuk kritériuma nem lesz kereshető egyébütt — a hogy az imént láttuk — mint azokban az alkalmazásokban, a melyekre használhatók lesznek, a legjobb lesz kétségenkívül ezeknek a kimondását kérnünk, a hogyan RIEMANN tette magukkal az alkalmazásokkal. Csekély kilátás is van arra, hogy ezek a kérdések azok legyenek, a melyeket EULER a priori kieszelt. Ha az utóbbiaknak a nagy mathematikai problémákban valami szerepük volna, úgy hajlandó lennék azt hinni, hogy ezt már tudnók ma.

*

De a várakozás álláspontjára helyezkedve, úgy látszik, hogy az aktuális topologia-fogalmak szerepüket abban az alakjukban, a melyben ismerjük, még nem játszották le. A hiány, a melyet betöltenek, egy esetben föltartóztatta a tudomány haladását. De ebből nem lenne szabad azt következtetni, hogy ez a föltartóztatás csak ebben az egy esetben következik be.

Valóban, azoknak a problémáknak a sorozata, a melyekbe belejátszanak, napról-napra növekszik.

·Magának a geométriának az alapelvei is köztük vannak. A mint Clifford és Klein megjegyezték, ha egyszer bebizonyosodott, hogy egy háromszög szögeinek az összege mindig egyenlő két derékszöggel, azért mégsem állíthatnók azt, hogy a mi geométriánk teljesen igaz. Más térszemléletek is lehetségesek lennének, a melyekben három egyenes, mely három meghatározott pontot kettenként összeköt, nem alkotna szükségszerűen háromszöget.

A mechanika, a melyre itt különös tekintettel kell lennünk és a melylyel egyébiránt az előbbi példa eléggé szoros vonatkozásban van, sok analog példával szolgál.

A legklasszikusabbak egyike a határtalan folyadékban súrlódás nélkül, irrotácionális mozgással úszó szilárd testé. Ha egy adott pillanatban ismernők a szilárd testre ható sebességeket, akkor a folyadékban uralkodó sebességeket is ezek által meghatározottaknak kellene tekintenünk: ez így van, legalább akkor, ha a test felületének génusza zérus. De ha gyűrűalakú testtel van dolgunk, akkor ahhoz, hogy ez az állítás igaz legyen, még azt is fel kell tételeznünk, hogy egy bizonyos állandó adva van.

Áttérve a hydrodynamikáról a rugalmasság-elméletre, az utóbbi, a lemezekre való alkalmazásban egy alapmennyiséget vezet be, a melytől a kifeszített és adott erők hatásának kitett lemez hajlásának vizsgálata függ. Ez a mennyiség minden bizonynyal pozitiv, valahányszor a lemezt egyetlen összefüggő vonal határolja, de nem így van, ha egy külső és egy belső határvonal létezik, mint például a gyűrűskörlap esetében.

Még meglepőbb az a hasonló tárgyú megjegyzés, a melyet Volterrának köszönünk. Szilárd test belsejében való rugalmas hatások előidézésére általában szükséges, hogy ez a test külső erőknek legyen alávetve. Másképpen áll a dolog, ha a test gyűrűalakú. Ily testben belső feszültségek léphetnek fel minden adott nyomás közbejötte nélkül.

Ezekben a példákban és még másokban, melyeket hozzátoldhatnék, helytelen okoskodásokat vittünk volna véghez, ha nem számolunk a génusz befolyásával; de ezek az inexaktságok az eredményeknek csak egy részét illették volna.

Van azonban egy elmélet, a melybe az alakzatok között való összefüggés sokkal mélyebben játszik bele, mint az algebrai függvényeknél: ez az elmélet az, a melylyel majd foglalkoznunk kell, a mennyiben a dynamika egyenleteire, a valós differenciál-egyenletekre vonatkozik. Másrészt könnyű belátni, hogy ez miért van így.

Ebben az esetben csakugyan nem azért kezdjük azzal, hogy a végtelen kicsinyek tartományára vetjük magunkat, mert ez a tetszésünktől függ és mert ezáltal egyszerűsíthetünk egy vizsgálatot, a melyet nagyon nehéz lenne direkte keresztülvinni. A probléma természete nem enged többé az eszközökben válogatnunk. A végtelen kicsiny itt az egyetlen adat, a mely rendelkezésünkre áll és más kiindulópont kereséséről többé nem lehet szó.

Világos most már, hogy az egymásra következő töredékek ezen szinthezise, a melylyel már foglalkoztunk, ránk nézve még sokkal fontosabb kérdéssé növi ki magát, mint az előbb. Ez az, a mit POINCARÉ úr munkálatai tettek nyilvánvalóvá. A kérdést csak bizonyos esetekben oldották meg; de ezen munkálatok után nincs többé jogunk kételkedni abban, hogy létezik a görbéknek egy elmélete, a melyek egy zérus génuszú felületen egy differenciál-egyenlet által vannak meghatározva; létezik egy másik is — és nem túlozok, ha azt mondom, hogy ez az elmélet az előbbivel nincs semmiféle kapcsolatban — oly felületen, a melynek génusza egy és így tovább.

Nem lephet meg többé bennünket, ha a helyzet-geometriának mint szükséges feltételnek való felhasználásával, a mely megelőz minden a valós differencziál-egyenletekre vonatkozó vizsgálatot, újra találkozunk a dynamikának két szabadságfokkal biró differencziál-egyenleteinek tanulmányozásánál és ezt valóban konstatálni fogjuk, mihelyt lehetséges lesz megkisértenünk ezt a vizsgálatot utolsó ízéig végrehajtani.

Mihelyt a szabadságfokok száma túlhaladja a kettőt, a helyzet-geométria törvényei, a melyeket kezdünk megismerni, távolról sem mutatják azt a csodás egyszerűséget, a melyben RIEMANN-nak feltüntek. De azért, mert nehezebb, alkalmazásuk korántsem lesz kevésbé szükséges és ha az égi mechanika valamikor képes lesz feleletet adni a Naprendszer stabilitásának híres problémájára, akkor már most bizonyos, hogy ebben topologiai elmélkedések lényeges szerepet fognak játszani.

Egyébiránt a helyzetgeométria — a mint már mondtuk — csak segédeszköz. Számos kérdést nem lehetne megoldani nélküle, de ő egyedül nem lenne képes azok megoldására. Nemcsak hogy mellette a számítás mindig szükséges lesz, de mindenekelőtt azért, hogy alapul szolgáljon és lehetővé tegye a helyzetgeométria intervenczióját. Valóban ez gyakran csak amaz alakzatoknak tetemes transzformációja révén lehetséges, a melyeken operálunk. Már az algebrai függvények esete erre nézve igen szembetünő példát szolgáltat. Messze út vezet az algebrai görbétől, úgy a mint azt középiskolai tanulóink rajzolni szokták, a megfelelő RIEMANN-féle felülethez, a melyből egyedül ered a görbe génusza. Talán a jövő analistájának a neki megadott tartományokba még mélyebben kell hatnia és mintegy saját kezeivel meggyúrnia azt a sokaságot, melynek összefüggését tanulmányozni fogja. Ez bizonyára nem a legkönnyebb, sem a legkevésbé érdekes feladata a jövőnek.

De lehet-e ily módon előre kijelölni azokat az utakat, a melyeken a jövő haladások végbe fognak mehetni?

Meg lévén győződve arról, hogy ily dologban a siker egyedüli biró, én ezt bizonyára nem merném megtenni, ha e falak között nem a tudomány jövőjének kellene mindenekelőtt szívünkön feküdnie. Ha én önök előtt azokat a szolgálatokat ecseteltem, a melyeket a helyzetgeométria a multban tett, ez azért történt, mert ők kezeskednek azokról, a melyeket tőlük várhatunk és a mikor majd végig tekintünk néhány eredményen, a melyet csak nemrégen az ő segítsége engedett elérni, ez abban a reményben történik, hogy ezek az eredmények önök közül némelyiket újabbak elérésére vezethetnek.

Nemcsak megismertetni a tudományt, hanem előidézni haladását, ennek reménye az — erről ne feledkezzünk meg — a mi a *Collège de France*-beli tanítás sajátos lényegét és magasabb létjogosultságát alkotja.

Fordította WODETZKY JÓZSEF.

A HALLWACHS-EFFEKTUSRÓL SZELÉNEN.

Bevezetés.

1. Ismeretes a szelén ama nevezetes sajátsága, hogy a fény nagymértékben növeli a vezetőképességét. A fény eme hatása más fémeken elenyésző csekély mértékben észlelhető, ellenben észlelhető rajtok a fotoelektromos jelenségek egy más faja, az ú. n. HALLWACHS-effektus: fény hatására negatív töltésüket elvesztik. Közelfekvő kérdés, vajjon a szelén a HALLWACHS-effektus szempontjából is másképen viselkedik-e, mint a többi fémek; hogy a szelén előbbi nevezetes tulajdonságával nem jár-e együtt a HALLWACHS-effektus eltérő alakja is? TANGL KÁROLY tanár kezdeményezésére ez irányban végeztem kisérleteket. E kisérleteket egy időre félbe kellett szakitanom; ez szolgáljon indokul arra, hogy eddigi kisérleteim néhány eredményét röviden ismertessem.

2. A szelén a HALLWACHS-effektus szempontjából tudtommal eddig csupán egyszer — SCHMIDT[1] részéről — volt vizsgálat tárgya. SCHMIDT a szelént vizsgálat előtt — nyilván azért, hogy egyenletes felületet kapjon — felhevitette és az igen érzékeny WIEDEMANN-féle,[2] ú. n. dinamikus módszerrel vizsgálta a szétszóródást. Megállapitja a szelén nagy szétszóró képességét, de az érzékenység nagyságára még nagyjában tájékoztató adatokat sem ad, a mi dolgozatának nem is volt czélja.[3]

---

[1] SCHMIDT: Wied. Ann 62. 1897. p. 407.

[2] E. WIEDEMANN u. H. EBERT: Wied. Ann. 33. 1888. p. 248.

[3] A kisérletek befejezte után jutott tudomásomra a «Halbmonatliches Litteraturverzeichniss» 1911. 15. füzetéből, hogy L. AMADUZZI: «L'effetto Hallwachs nel Selenio cristallino» Rend. di Bologna 1909/10 czimű értekezésében ugyane tárgygyal foglalkozik. A dolgozat tartalmáról nem szerezhettem tájékozást.

3. Viszont igen sokan vizsgálták a szelénnek és pedig az ú. n. fémes szelénnek azon tulajdonságát, hogy vezetőképessége a fény hatására megváltozik. Legújabban CHR. RIES[1] számol be egy összefoglaló értekezésben a vizsgálatok eredményéről és egyszersmind a jelenség theóriáját is adja. Összehasonlítva a vezetőképesség megváltozását a fényelektromos szétszóródással, az elsőt belső (innerer photoelektrischer Effekt) fényelektromos effektusnak nevezi.

4. Jelen vizsgálatok czélja volt a szelént részletes vizsgálat alá venni a HALLWACHS-effektus, v. a mint RIES nevezi, külső fotoelektromos jelenség szempontjából. Ezen vizsgálatok kiterjedtek az amorf és a 217 C° hőmérséklet közelében keletkező kristályos módosulatra.

A kisérleti berendezés leírása.

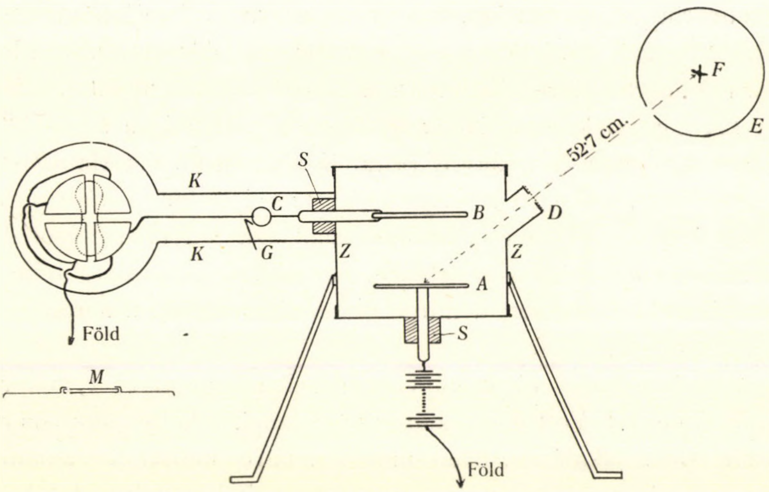
5. Kisérleti berendezésem nagyban hasonlít R. REIGER-éhez[2] (1. ábra), melyet ő az izolátorok fotoelektromos viselkedésének vizsgálatánál alkalmazott. *A*, *B* egy kondenzátor *z*, *z* zink edényben, a melytől a kondenzátor-lemezek tartói sellakkal (*S*) vannak elszigetelve. A kondenzátor-lapok átmérője 9·5 cm és távolságuk 6·7 cm. *C*-nél egy higany-csepp kapcsoló van a *B* kondenzátorlap és az elektrometer egyik quadránspárától jövő drótok kapcsolására és a *G* földvezeték befogadására. A *G* földvezeték egy zsinórral nagyobb távolságból is kezelhető. A fotoelektromos áramok mérésére egy DOLEZALECK-féle quadrans-elektrometer szolgált, a melynek a burkolatából kiálló részeit egy zink és egy dróthálóból készült henger védte külső elektrosztatikai hatások ellen. Az összekötő drótok *k*, *k* tágas zink csőben futottak. Az *A* kondenzátor megvilágítása a *D* oldalnyíláson át történt egy HERAEUS-féle higany-lámpával (a mely *E* tágas zinkhengerben elhelyezve,

---

[1] CHR. RIES: Phys. Zeitsch. 12. 1911. p. 480. és p. 522.

[2] R. REIGER: Ann. d. Phys. 17. 1905. p. 935.

egy nyiláson át bocsátotta fényét a *D*-n át *A*-ra). A *D*-nél levő nyilás egy finom sárgaréz hálóval volt még lefödve. Az *A* lap és az *F* lámpa kölcsönös helyzete a kisérletek tartama alatt változatlan maradt. A zinkhenger alsó fele a beleerősitett *A* lappal levehető. Az *A* kondenzátor lap egy vízbatteria negatív pólusával volt összekötve, míg a telep pozitív sarka az elektrometer, kondenzátor és kapcsoló drótok burkolatával együtt



1. ábra.

állandóan a földdel kapcsoltatott. A *D*-t zinklap fedte, a melyet egy zsinórszerkezettel tetszésszerint nyithattam vagy zárhattam.

Az *A* lapra helyeztem a megvizsgálandó szelént 3 cm átmérőjű fémlemezekre olvasztva. Hogy e lemezek mindig az *A* közepén álljanak és hogy mindig ugyanakkora felület legyen a fény hatásának kitéve, *A*-ra egy vékony pléhdiafragmát helyeztem, melynek közepén 2·6 cm átmérőjű nyilás volt és a mely úgy volt görbítve, hogy épen befogadta a 3 cm átmérűjű korongokat (1. ábra *M*). A *D* nyiláson akkora fénynyaláb jutott az edénybe, hogy az érzékeny szelénfelületen kívül körülbelül még 3 mm vastag gyűrűt alkotott. A fénynyalábnak ez a része azonban nem hozott létre semmi szétszóródást, mert az *M* diafragma egészen be volt paraffinozva és a paraffin fotoelektromos érzékenysége oly kicsiny, hogy az én berendezésemmel teljességgel nem tudtam semmi érzékenységet kimutatni nagy felületek alkalmazásával sem. REIGER is csak igen intenziv fény alkalmazásával nagy pontencziálok mellett kapott paraffinon igen kis hatásokat.[1]

Fényforrásul HERAEUS-féle quarchiganylámpát használtam, melynek egyszerű kezelése nagy kényelmet nyújt és a mely ha stacionárius állapotba jön, órákon át nagyon állandóan működik.[2] A lámpát tápláló áramot egy DEPREZ-D'ARSONVAL rendszerű Amperometeren állandóan ellenőriztem. A fény intenzitását két koromfelülettel kontrolláltam. A korom igen állandó[3] és az ozonhatás igen kicsiny rajta. Kezdetben alkalmaztam egy $Cu\ O_2$ lapot, de ezen az ozonhatás idővel tetemes változást hozott létre. A két koromfelület adataiból a fényintenzitásokat redukáltam egy bizonyos értékre, de ezzel a hiba nincs teljesen kiküszöbölve, mert a mint észrevettem idővel a korom is változik egy keveset.

Az elektrometer tűjét 80 vizelemmel töltöttem és 1 méter skálatávolból 1 Volt potencziálkülömbségnek a két quadránspár között 131·2 skálárész felelt meg 2 mm-re beosztott skálán. Egyik quadránspár állandóan a földdel volt kapcsolva. A fotoelektromos áramokat a B kondenzátorlap feltöltődéséből, illetőleg az elektrometer tűjének elforgási sebességéből mértem. Ez a sebesség $\frac{\text{skálarész}}{\text{másodpercz}}$-ben kifejezve szolgál a következőkben a preparatum fotoelektromos érzékenységének jellemzésére. Időmérésre egy kronográfot használtam. Az A kondenzátort állandóan 49 vizelemmel töltöttem.

6. A szelént két — amorf és fémes (kristályos) — módosulatban vettem vizsgálat alá. A használt anyag *C. A. F.* KAHLBAUM-tól (Berlin) készitett rúd-alakú szelén volt. A preparatumokat a következő módon készitettem. Az emlitett 3 cm átmérőjű

---

[1] REIGER : l. c.

[2] W. HALLWACHS : Phys. Zeitschr. 5. 1904. p. 489.

[3] P. LENARD : Drude Ann. 12. p. 449. és 714. 8 p. 149.

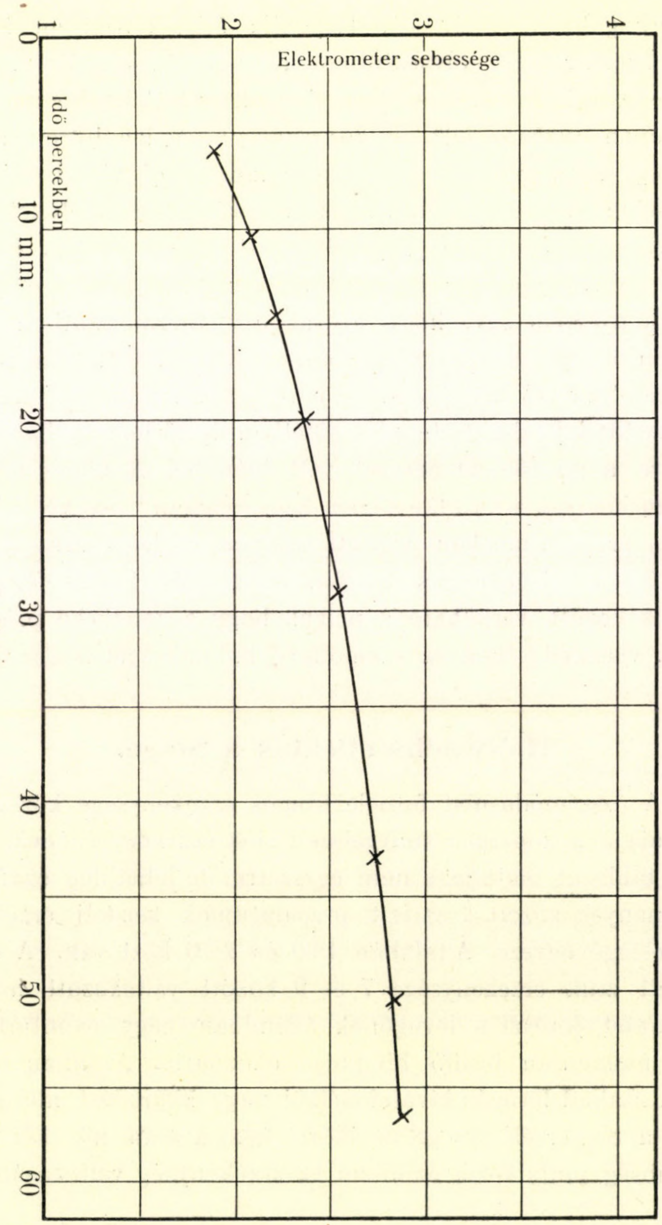
fémkorongokat a szelén olvadáspontja fölé hevítettem és vékony szelénréteget olvasztottam reájuk. Az olvadt anyagot egyenesre csiszolt üveg szélével úgy elsímítottam, hogy a felület szépen tükröző lett. Ekkor a korongot lehűtöttem azzal, hogy egy nagy ólómlapra tettem, a mely alul vízzel érintkezett. Ilyen módon szépen tükröző amorf szelénfelületeket kaptam. A továbbiakban e preparatumokat Se_0-al jelzem. A kristályos módosulatokat a leírt módon készített amorf preparatumokból nyertem úgy, hogy azokat egy thermosztatban 3-tól egészen 6 óráig terjedő időközön át 200°—210° C hőmérsékleten tartottam. A kristályosítás bevégeztével a preparatumokat egy kartondobozba tettem és sötétben hűtöttem szobahőmérsékletre, a mi 15—20 perczet vett igénybe. A fémes szelénpreparatumokat a következőkben RIES nyomán[1] Se_{II}-vel jelzem. A Se_{II} preparatumokon végzett számos észlelés arra mutat, hogy úgy a kristályosítás hőfoka, mint időtartama elég nagy határok között variálható a nélkül, hogy a keletkező preparatumok viselkedésében ez számottevő külömbséget hozna létre.

Hallwachs-effektus a Se_{II}-n.

7. A Se_{II} módosulat fotoelektromos érzékenysége közel egyharmada a közönséges smirgelezett zink érzékenységének. Mint az 1. táblázat mutatja, a nem egyszerre, de lehetőleg egyforma körülmények között készített preparatumok kezdeti érzékenysége eléggé egyező. Általában 1·60 és 2·10 közt van. A smirgelezett zink érzékenysége 7 és 9 között váltakozott, a mely ingadozást jórészt a levegőnek állandóan nagy ozontartalma miatt momentán beálló kifáradás okozhatta. Azonban míg a fémek szabad levegőn kivétel nélkül nagy kifáradást mutatnak, addig a Se_{II} érzékenysége az idővel fokozatosan nő. Lényeges külömbség mutatkozik azonban az érzékenység változásában a

---

[1] CHR. RIES: l. c.


Elektrometer sebessége
Idő percekben
10 mm.
1
2
3
4
0
10
20
30
40
50
60

2. ábra.

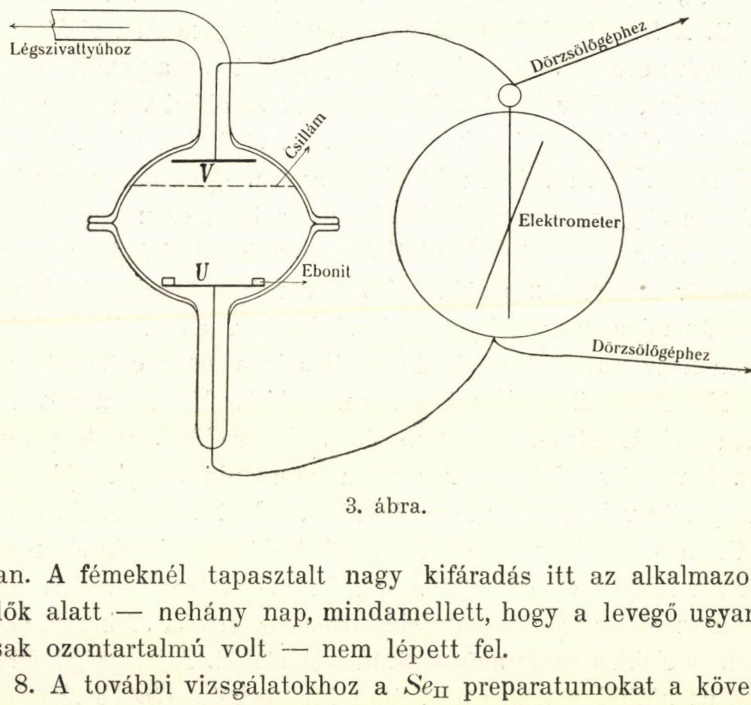
szerint, a mint sötétben vagy fény hatása alatt van a Se_{II} felület. Nevezetesen a fény hatására az érzékenység növekedése sokkal gyorsabb, mint sötétben. Az érzékenységnek ezt a növekedését több, mint ötven preparatumon észleltem. A jelenség lefolyását tünteti fel a 2. ábra. Az abscissák adják az időt, az ordináták az elektrometer tűjének az áramintenzitásokkal arányos haladási sebességét, a mely mindjárt mértéke az illető pillanathoz tartozó érzékenységnek. Ez ábra a tizenötös preparatum viselkedését tünteti fel. Látjuk, hogy az érzékenység kezdetben kissé gyorsabban emelkedik, mint később. Ez a vizsgálat 51 perczig tartott, miközben a Se_{II} folytonosan meg volt világítva. A megvilágítás az első észlelésnél kezdődött.

A Se_{II} preparatumokat az előállítás után kis kartondobozokban tartottam, a melyekbe semmi fény nem hatolt be. Az érzékenységnek sötétben és fény hatására való növekedését tünteti fel az 1. táblázat. Az első oszlop az egyes preparatumok sorszámát adja. A második oszlop az észlelés idejét a preparatum előállításától számítva. A harmadik oszlop tünteti fel az észlelt érzékenységet, ha a preparatum csak az észlelés ideje alatt volt megvilágítva. Az ötödik oszlop mutatja az érzékenységet a 4. oszlopban feltüntetett hosszabb megvilágítás után. A 14- és 15-ös preparatumok kezdeti érzékenysége közel egyenlő, de míg 15 érzékenysége 51 perczny folytonos fényhatás után 1·91-ről 2·88-ra emelkedik, addig 14-é, a mely a két észlelés között sötétben volt, 1·95-ről 2·15-re emelkedik és közel 18 óra alatt sem éri el 15-nek fényhatására nyert érzékenységét. Hasonlóképen vagyunk a 19-, 20-, 21-es preparatumokkal. Míg 21 érzékenysége 77 perczny fényhatás után 2·05-ről 3·16-ra emelkedik, 19 és 20-é csak közel 31 óra alatt emelkedik 2·01-ről, illetőleg 1·98-ról 3·01, illetőleg 3·17-re.

1. táblázat.

Preparatum száma	Észlelés ideje az előállitástól óra	Észlelés ideje az előállitástól perc	Érzékenység sötétben	Fényhatás ideje percekben	Érzékenység fényhatás után
14	—	15	1·95		
	1	14	2·15		
	17	46	2·82		
	29	25	3·07		
15	—	19	1·91		
	1	10		51	2·88
	17	49	3·01		
	29	54	3·16		
19	1	44	2·01		
	3	43	2·17		
	16	46	2·73		
	30	54	3·01		
	70	—	3·33		
20	1	58	1·98		
	3	47	2·08		
	16	50	2·73		
	31	00	3·17		
	70	7	3·40		
21	1	58	2·05		
	3	15		77	3·16
	17	1	2·99		
	31	5	3·64		
	70	10	3·50		
10	—	29	1·80		
	27	8	2·74		
	27	58		50	3·15
	50	16	3·31		
	50	31		15	3·35
12	2	37	1·95		
	3	44		67	2·85
	28	6	2·68		
	28	26		20	2·86
38	—	21	2·03		
	287	—	3·86		
39	—	26	1·83		
	263	50	3·25		
40	—	32	1·70		
	168	30	3·02		

A preparatumok érzékenysége sötétben hoszszabb időn át folyton növekedik, mint azt a 3. oszlop mutatja. Ugyancsak hosszabb időn át megtartják azt a tulajdonságukat, hogy fény hatására az érzékenység növekedjék; úgy látszik azonban, hogy bizonyos idő után a megvilágítás már nem növeli az érzékenységet. E kisérletek azt mutatják, hogy a Se_{II} érzékenysége úgy sötétben, mint megvilágítás által ugyanazt a maximális érzékenységet éri el, sötétben azonban jóval lassab-



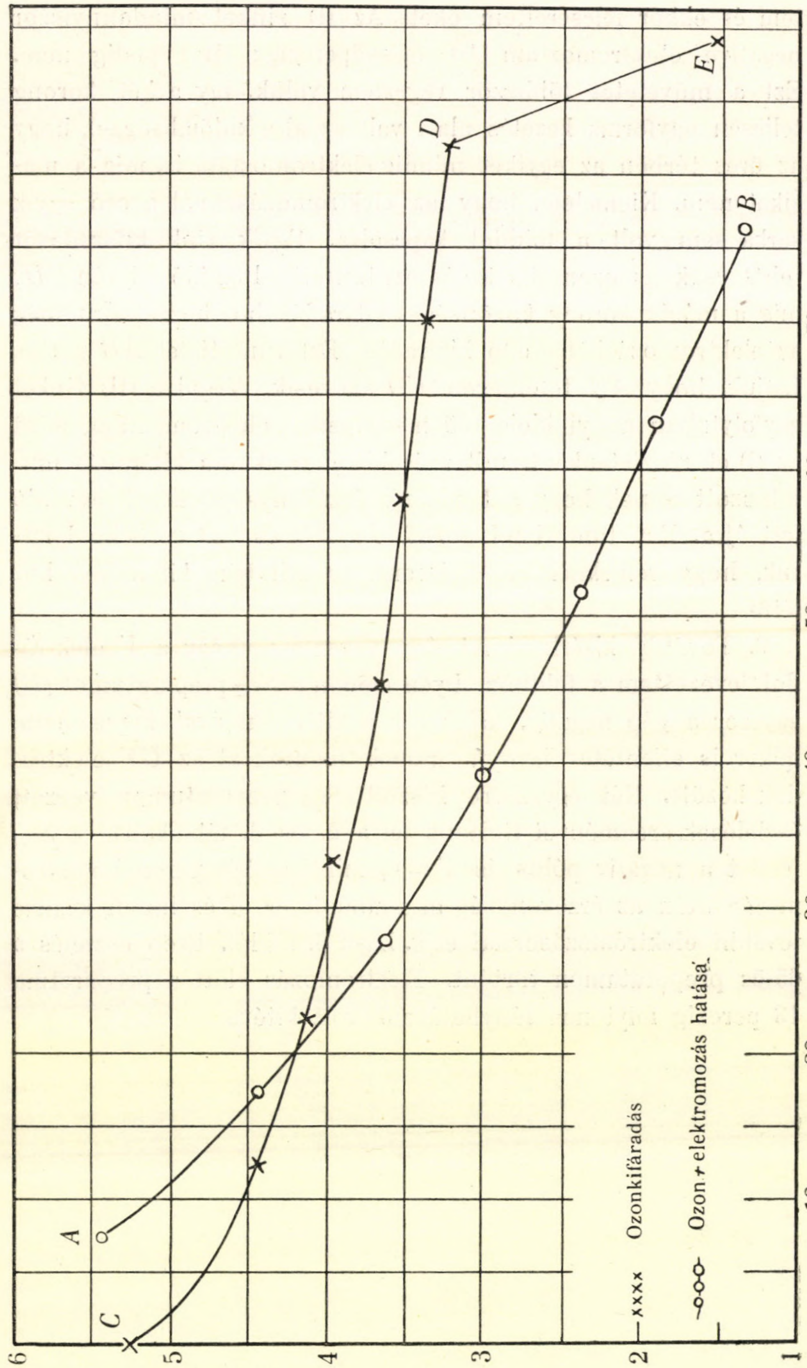
3. ábra.

ban. A fémeknél tapasztalt nagy kifáradás itt az alkalmazott idők alatt — nehány nap, mindamellett, hogy a levegő ugyancsak ozontartalmú volt — nem lépett fel.

8. A további vizsgálatokhoz a Se_{II} preparatumokat a következőkép kezeltem. Készítettem egy üvegedényt, a melynek rajza a 3. ábrában látható. Két félgömb alakú üvegbe beforrasztottam két elektródot, a melyek *U* zink és *V* aluminium lapokban végződtek. A két félgömböt összetéve evakuálni lehetett. *U* és *V* közé egy a szélén négy lyukkal ellátott csillámlemezt ragasztottam be. E lemez arra szolgált, hogy megakadályozza az egyik elektródról a másikra a kathodelporlódás által fellépő materiális

részecskék átvitelét. U és V egy dörzsölő- vagy HOLTZ-gép sarkaival jöttek kapcsolatba és az edényt 1—2 mm nyomásig evakuálva, elektromos kisülést vittem át az edényen. Az U zinklapra helyeztem a Se_{II} preparatumokat. Így az egyik elektródot a Se_{II} felület, a másikat a V aluminium alkotta. A ritkított térben átmenő áram intenzitását nem mértem; az elektródok közti feszültségkülömbséget egy BRAUN-féle elektrometer mutatta. A rendesen alkalmazott ritkítás mellett ez 400—600 Voltot tett ki, míg a dörzsölőgép nyitva mintegy 6000 Volttal működött. A következőkben ezt a műveletet egyszerűen elektromozásnak nevezem. És pedig, ha a Se_{II} felület van a pozitív sarkkal kapcsolva, akkor pozitiv, ha a negatív sarokkal van kapcsolva, negatív elektromozásnak nevezem. Az első észleléseknél sem U, sem V nem volt a földdel kapcsolva. Ilyen elektromozások után a Se_{II} preparatumok érzékenysége tetemesen megváltozik. Pl. a 21-es preparatum kezdeti érzékenysége 3·61 és 2·5 percznyi negatív elektromozás után 6·45. Hasonlóan kezelve több preparatumot a legszabálytalanabbul kaptam az érzékenységben igen nagy növekedéseket, de kaptam igen nagy eséseket is.

Más fémek hasonlóan kezelve nagy kifáradást mutatnak. Tettem próbát zink-, sárgaréz- és vaslemezekkel. 2—3 perczig tartó negatív elektromozás után mindenik annyira kifáradt, hogy alig valami vagy semmi szétszóródást sem adtak. Használtam ezen vizsgálatokhoz napokkal előbb smirgelezett fémeket, a melyek az ozonhatás folytán már tetemesen kifáradtak és használtam frissen smirgelezett fémkorongokat. Mindkét esetben az elektromozás után kifáradás lépett fel. A jelenség lefolyását az utóbbi fémeken a 4. ábra két görbéje, CD és AB tünteti fel. E görbéket úgy nyertem, hogy két frissen smirgelezett zinknek észleltem a kezdeti érzékenységét és ezután mindjárt az evacuáló csőbe tettem őket. Itt kiszivattyúzva a levegőt egyik preparatumot (I) 10 másodperczig negatíve elektromoztam, míg a másikat (II) nem. Innen kivéve a preparatumokat, észleltem újra az érzékenységüket. Az észlelések váltogatva történtek; míg egyik a ritkított térben volt, addig a másikat észlel-


Ozonkifáradás
Ozon + elektromozás hatása
A
B
C
D
E
10
20
30
40
50
60
70
80
90
1
2
3
4
5
6

4. ábra.

tem és ekkor felcseréltem őket. Az (I) zinket mindannyiszor negatíve elektromoztam 10 másodperczig; (II)-t pedig nem. Ezt a műveletet többször végeztem velük. Így a két korong teljesen egyforma kezelés alatt volt azzal a külömbséggel, hogy az üres térben az egyiket mindig elektromoztam is, míg a másikat nem. Kiemelem, hogy az elektromozásoknál a cső egyik sarka sem volt a földdel kapcsolva. Egyik zink kifáradását tehát csak az ozon okozta és ezt tünteti fel az idő folytán *CD*; míg a másik korong közönséges kifáradásához hozzájárult még az elektromozásból eredő kifáradás. Ezt tünteti fel *AB* görbe. Látjuk, hogy *AB* tetemesen *CD* alá esik. Végül a (II) zinket egyfolytában annyi ideig (60 másodpercz) elektromoztam, mint az (I)-et részletenként, mikor is hirtelen akkora kifáradás mutatkozott ennél, hogy a két zink érzékenysége közel egyenlő lett újra. Ezt tünteti fel a *DE*. Az *AB* és *CD* görbékből látjuk, hogy fémeknél az elektromozás mindjárt kifáradást hoz létre.

9. További kisérleteimet úgy végeztem, hogy a *V* elektródot levezettem a földhöz. Ilyen módon a Se_{II} preparatumot *(U)* egyszer a gép negatív, máskor a pozitív sarkával kapcsoltam, mikor is ellentétes irányú áramok mentek át az *UV* elektródok között. Két egyszerre készült Se_{II} preparatumon végzett észlelések eredményét tüntetik fel a 2. és 3. táblák. Ha a Se_{II} felület a negatív pólus és $V = 0$, mintegy két percnyi elektromozás után az érzékenység maximumot ér el és innen kezdve további elektromozásokkal esik. Lásd 2. táblát. Ezen észlelés a 65-ös preparatumon történt. Elektromozás előtt a preparatum 13 perczig folytonos fényhatásnak volt kitéve.

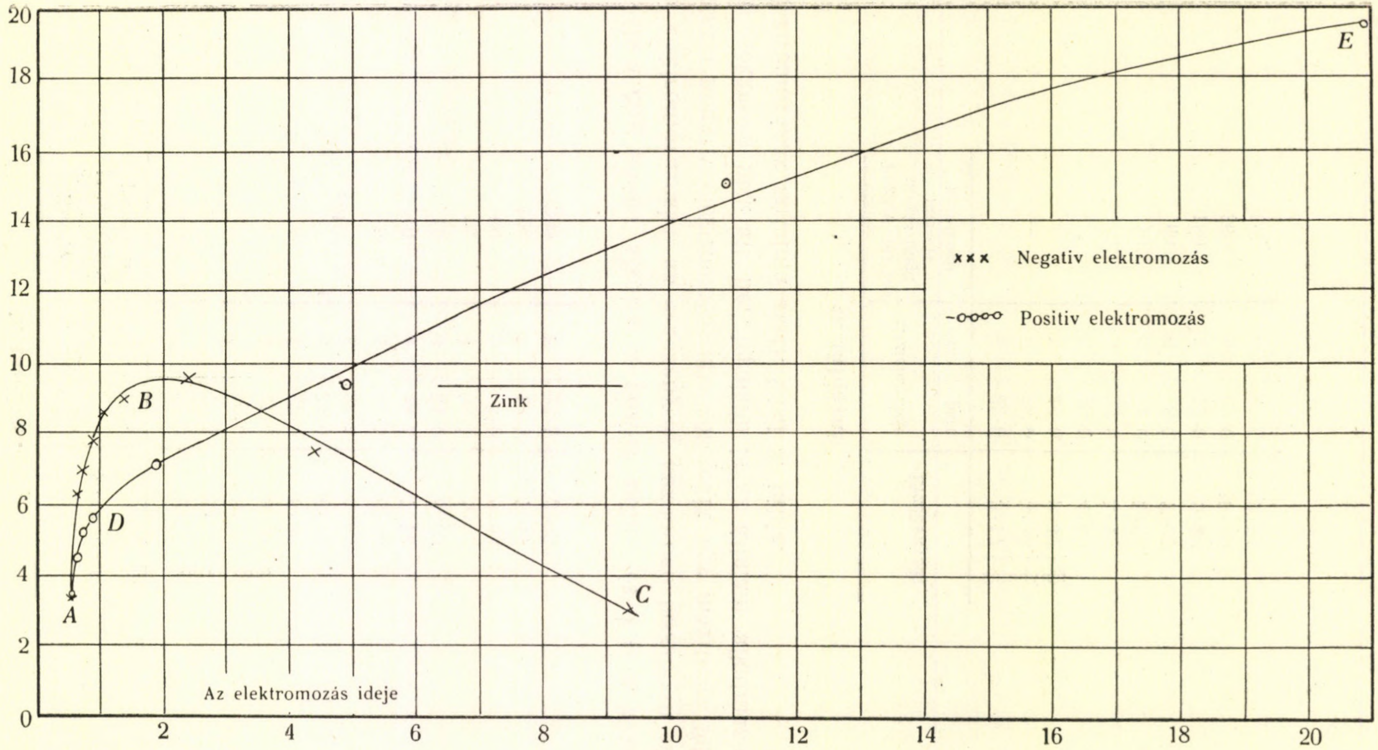
2. táblázat.

Negatív elektromozás ideje másodpercekben	Észlelés ideje óra	Észlelés ideje perc	Érzékenység	
—	4	8·0	2·71	fényhatás
—	4	11·5	2·94	fényhatás
—	4	16·0	3·18	fényhatás
—	4	21·0	3·34	fényhatás
5	4	27·5	6·29	
sötétben	4	34·0	6·29	
sötétben	4	38·5	6·25	
5	4	43·5	6·95	
10	4	48·5	7·76	
10	4	54·0	8·60	
20	4	59·5	8·98	
60	5	6·0	9·63	
120	5	13·5	7·47	
300	5	23·5	3·05	

Ha a Se_{II} felület alkotja a pozitív pólust és $V = 0$, akkor az elektromozásokkal az érzékenység kezdetben lassabban nő, mint a negatív elektromozásnál; közeledik egy maximum felé, de csökkenés nem áll be, legalább is az általam alkalmazott elektromozások tartalma alatt. Lásd 3. tábla.

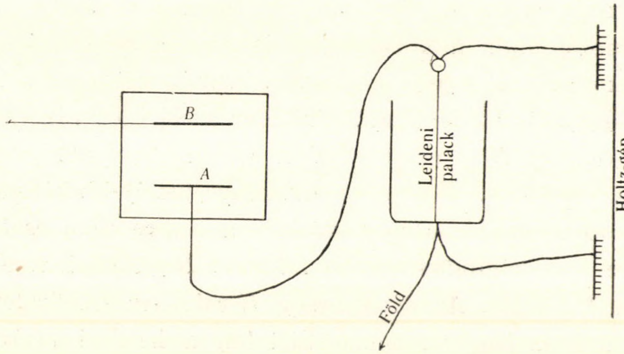
3. táblázat.

Pozitív elektromozás ideje másodpercekben	Észlelés ideje óra	Észlelés ideje perc	Érzékenység	
—	5	33·0	3·17	fényhatás
—	5	38·0	3·33	fényhatás
—	5	42·0	3·47	fényhatás
5	5	49·0	4·50	
5	5	55·0	5·12	
10	6	1·0	5·63	
60	6	8·5	7·07	
180	6	17·0	9·40	
360	6	29·0	15·09	
600	6	45·5	19·51	


xxx Negativ elektromozás
-oooo Positiv elektromozás
Zink
Az elektromozás ideje
A
B
C
D
E
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20

5. ábra.

Míg tehát összesen 2 percznyi negatív elektromozással az érzékenység csökkenni kezd, 20 percznyi pozitív elektromozás után még mindig emelkedőben van. Ez az észlelés azért is nevezetes, mert itt kaptam a Se_{II} módosulaton a legnagyobb érzékenységet, a mi több, mint a smirgelezett zink érzékenységének kétszerese. Ugyane kezelés által más esetekben 9—12 között váltakozó növekedéseket kaptam mintegy 10—12 percig tartó pozitív elektromozás után. A 2. és 3. táblák eredmé-



6. ábra.

nyeit grafikusan tunteti fel az 5. ábra *ABC*, illetőleg *ADE* görbéje.

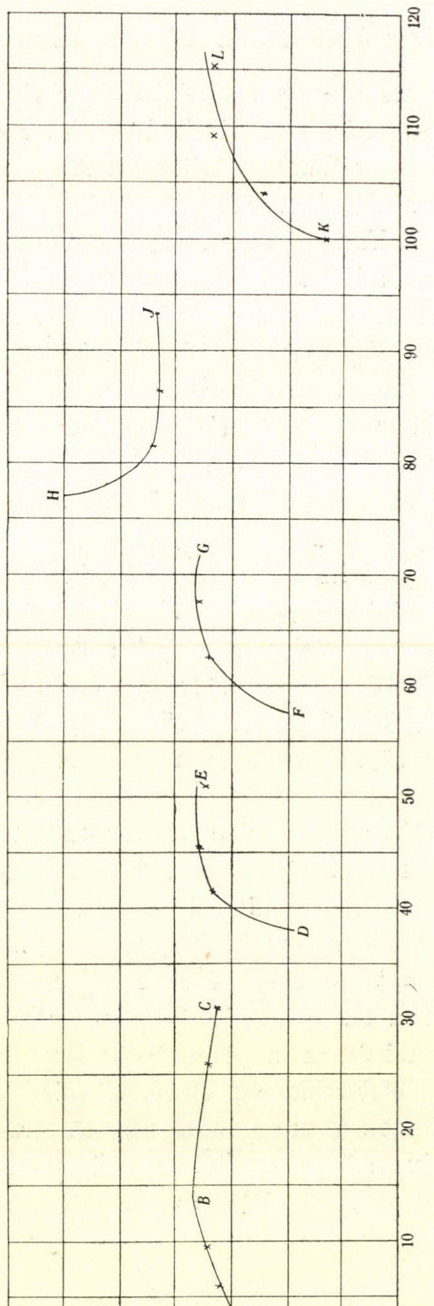
Lényegében ugyanezt a kisérletet végeztem más körülmények között a következőképen. A Se_{II} preparatumokat a fényérzékenységet illetőleg először megvizsgáltam az ismert módon az *AB* kondenzátort tartalmazó edényben. Ezután *A*-t egy a Holtz-géppel parallel kapcsolt leideni palaczk negatív v. pozitív fegyverzetével kapcsoltam, míg a palaczk másik sarka a földhöz volt vezetve (6. ábra) és a gépet bizonyos ideig működésbe hoztam. Ha a Se_{II} felület a negatív sarkkal volt kapcsolva, akár esett fény a Se_{II}-re, akár nem, a gépnek 2—3 percznyi járatása után a Se_{II} érzékenysége esett; viszont, ha a pozitív sark volt kapcsolva a Se_{II}-vel, az érzékenység növekedett. Mindkét esetben a hatás olyan, hogy idővel eltűnik és a Se_{II} érzékenysége közel a kezdeti értékre emelkedik, illetőleg esik. Ezen megfigyeléseim eredményét tünteti fel a 7. ábra AL görbéje. Az ordináták a fotoelektromos áramokat, az abscissák az időt jelentik. Az egyes görbe részek jelentése a következő. AB tünteti fel a közönséges fényhatást. Ekkor a Se_{II}-t a leideni palaczk negatív sarkával kapcsoltam, miközben a gép 30 másodperczig működött és a Se_{II}-re nem esett fény. A kapcsolatot a leideni palaczkkal megszakítottam és mértem a fotoelektromos érzékenységet. A BC görberész közbülső pontja mutatja, hogy az érzékenység esett. Most 30 másodpercznyi újabb negatív elektromozás után, miközben fény is esett a Se_{II}-re, újra esett az érzékenység. Ezt adja a C pont. Ezután két percznyi negatív elektromozás hatása alatt, miközben a Se_{II} meg van világítva, az érzékenység D-ig esett; DE a magára hagyott Se_{II} megújhodása sötétben. F adja az érzékenységet újabb két percznyi negativ elektromozás után, miközben a Se_{II}-re nem esett fény FG újra a megújhodás sötétben. Most a Se_{II}-t pozitíve elektromoztam 2 perczig. Az érzékenység G-ről H-ra emelkedett, míg azután magára hagyva, onnan hirtelen a kezdeti értékre tér vissza, HI. Újabb 3 percznyi negativ elektromozásra az érzékenység K, míg KL a sötétben beálló megújhodás. Ez észlelések a 67-es preparatumon történtek.

E kisérletekből kitünik:

1. Míg a levegőn való pozitív, illetőleg negatív elektromozás az érzékenység növekedését, illetőleg csökkenését hozza létre, a ritkított térben való elektromozások kezdetben csak növekedést okoznak és csak hosszabb tartamú negatív elektromozás után mutatkozik itt is csökkenés.

2. Míg a levegőn való elektromozások hatása megszűnik, a ritkított térben létrehozott hatások néhány napig megmaradnak.

Mint a normális eltérő jelenséget meg kell említenem, hogy két Se_{II} preparatum, a melyek fény hatására a normális érzékenységbeli növekedést adták, sötétben mintegy 20 órán belül több mint a kezdeti érzékenység kétszeresére emelkedtek.



7. ábra.

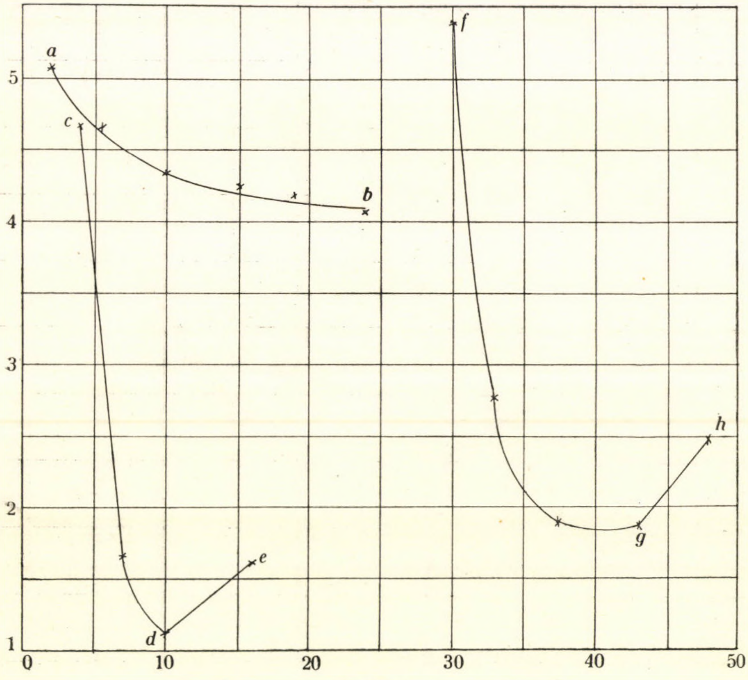
Vizsgálatok amorf szelénen.

10. Az amorf szelén — a melyet ezután röviden Se_0-al jelzek — lényegesen másképen viselkedik, mint a Se_{II}. Egyfelől a kezdeti érzékenysége mintegy kétszer akkora, mint a Se_{II}-é, a mi tekintettel a Se_{II} fémes és a Se_0 szigetelő voltára, már magában meglepő. Továbbá míg a Se_{II} folytonosan megvilágítva érzékenyebbé lesz, addig a Se_0 folytonos megvilágítás mellett rohamosan érzéketlenebbé válik bizonyos határig, amiután állandó hatást ad. Egy kifáradásféle jelenség lép fel, a mely a fényhatás megszüntével eltünik és a preparatum a sötétben megújhodik. A kifáradás és megújhodás időtartamának, meg az érzékenység nagyságának változása tekintetében az egyes preparatumok igen külömbözőképen viselkednek. Valószinü azonban, hogy a preparatumoknál egy jól meghatározott előállítási módot betartva, quantitative is egyező tulajdonságú preparatumok nyerhetők, mint a Se_{II}-nél. A Se_0 viselkedését tüntetik fel a 8. ábra *ab, cde, fgh* görbéi, a melyek a 60-as preparatumon észleltettek az előállítás után közvetlen, attól 23·5 és 49 óra mulva. A *de, gh* görberészek az érzékenység növekedését tüntetik fel, a mely rögtön beáll, mihelyt a preparatumra nem esik fény.

Tekintettel a Se_0 erősen szigetelő voltára, gondolhatunk e jelenségnél arra, hogy a kifáradás a Se_0 nagy ellenállásának egyszerű következménye és mint ilyen, csak látszólagos kifáradás. Ugyanis a dolgot a következőképen gondolhatjuk: A preparatum fémkorongja és ezen a Se_0 réteg alsó fele állandó E potencziálon van tartva. A réteg másik felülete csak bizonyos idő alatt veszi fel ezt a potencziált.[1] Most ha e felületre fény esik, ott az elektromosság eltávozta miatt a potencziál esik és a Se_0 rétegen át áram indul meg az érzékeny felület felé. A stationárius állapot beálltával az érzékeny felületen a potencziál $E—ir$, hol E a vízbatteria potencziálja, i a fotoelektro-

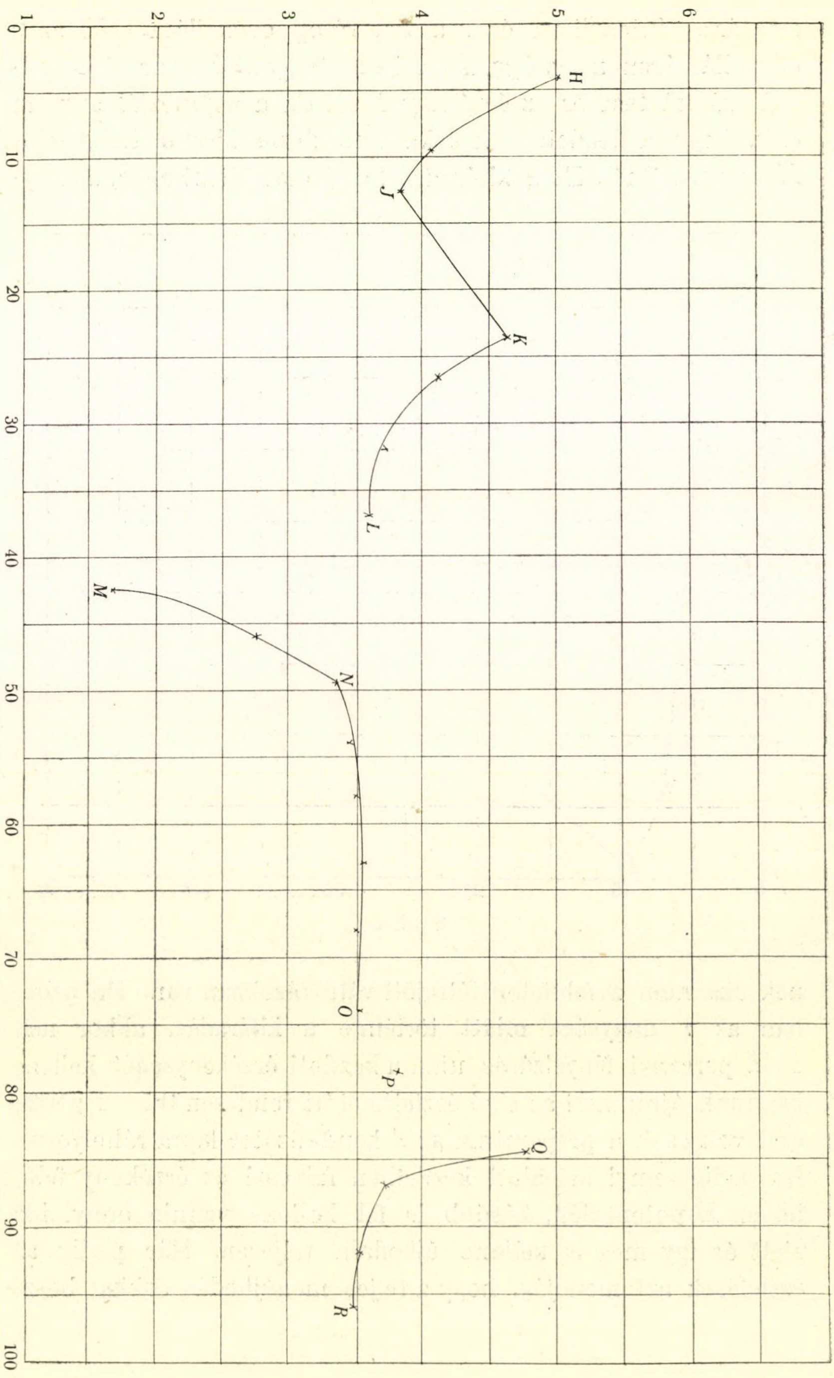
[1] Reiger: l. c.

mos áram intenzitása és r a Se_0 réteg ellenállása. Ha az r ellenállás igen nagy, úgy megeshetik, hogy az ir szorzat E mellett számot tesz és az érzékeny felületen a potencziál annyira esik, hogy a leadott fotoelektromos áram kisebb lesz, mint E potencziálnál. Ez a kifáradás tehát csak látszólagos, a mely-



8. ábra.

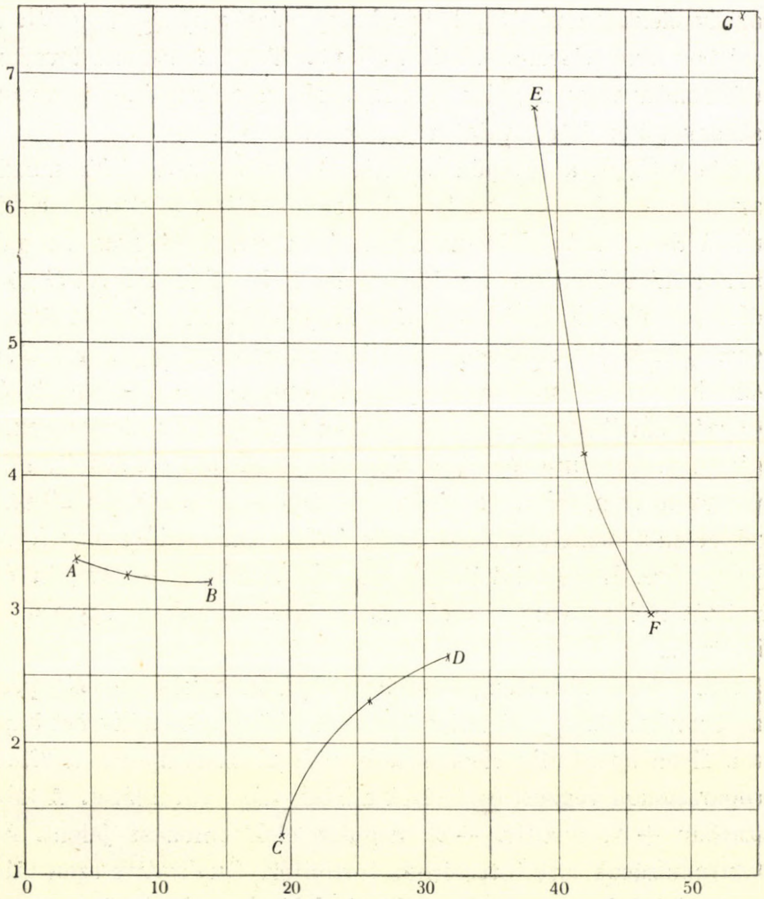
nek oka nem a felületen létrejött változásokban van. Ha azonban az r nagysága miatt történne a kifáradás, akkor már 1—2 perczriyi fényelzárás után a kezdeti érzékenységet kellene kapnunk újra, mert az első észlelés előtt rendesen 0·5—1 percz-czel volt csak a preparatum az A kondenzátor lapra ráhelyezve. Ha pedig ennyi idő alatt kezdetben felveszi az érzékeny felület az E potencziált, később is fel kellene vennie ennyi idő alatt és így meg is kellene újhodnia teljesen. Már pedig az észlelések azt mondják, hogy a teljes megújhodás sokkal hosz-



9. ábra.

szabb idő alatt áll be, mint a kifáradás; pl. némely preparatumoknál 16—20 óra mulva.

Alkalmaztam itt is a levegőn és légüres térben való elektromozást épen olyan módon, mint a Se_{II}-re. A levegőn való



10. ábra.

elektromozás hatását tünteti fel a 9. ábra *HKLMNOPQ* görbéje. Az abscissák az időt tüntetik fel. *HI* és *KL* a fény hatására beálló kifáradást tüntetik fel, a míg *IK* a sötétben való megújhodást. 30 másodperczig tartó negatív elektromozás hatására az érzékenység esik M-ig, míg MN az érzékenységnek sötétben való megújhodása. NO a megújhodás folytatása fény hatására. Itt a folyamatban levő megujhodás és a kifáradást létrehozó fényhatás egymással összegeződnek és ezért jön létre N-nél a törés. P és Q 30, illetőleg 120 másodperczig tartó pozitív elektromozás által létrehozott érzékenység, míg QR a sötétben való visszaesést tünteti fel. Tehát a szabad levegőn való pozitív vagy negatív elektromozás amorf szelénen is olyan hatásokat hoz létre, mint a fémes szelénen.

Míg a Se_{II}-n a levegőn és ritkított térben való elektromozások nem egy jellegű hatásokat hoznak létre, a Se_0-n a ritkított térben való elektromozások is olyan hatásokat hoznak létre, mint a levegőn. Ezt tünteti fel a 10. ábra $AB \ldots G$ görbéje. AB fény hatására beálló kifáradást jelent, míg 5 másodpercznyi negatív elektromozás után az érzékenység B-ről C-re esik, honnan — magára hagyva a preparatumot — az érzékenység emelkedik, CD. 5 másodpercznyi pozitív elektromozás után a preparatum érzékenysége D-ről E-re emelkedett, míg magára hagyva rohamos visszaesés áll be, EF és újabb 20 másodpercznyi pozitiv elektromozás újabb emelkedést hoz létre F-ről G-re. Látjuk tehát, hogy a Se_0 mindkét — levegőn és ritkított térben való — elektromozással szemben egyformán viselkedik.

Mint már említettem, lehetőleg egyformán készített Se_0 preparatumokon is quantitative igen különböző eredményeket kaptam. Ilyen speciális viselkedésre például szolgáljanak a 62-es preparatumon végzett észlelések adatai. Lásd 4. táblázat. A táblázatban $+$ *el.* pozitív, $-$ *el.* negatív elektromozást jelent. Az elektromozások ritkított térben történtek. Qualitative ezen táblázat adatai is egyeznek többi észleléseimmel, de 6 perczynyi pozitív elektromozás után az érzékenység 78·40-re emelkedett, a mi több, mint a smirgelezett zink érzékenységének nyolczszorosa. Szept. 11-ére ezen preparatum érzékenysége 78·40-ről 9·09-re esett. Fény hatására újabb kifáradás áll be és elég 1 másodperczny negatív elektromozás, hogy a preparatum teljesen érzéketlen legyen. Viszont 5 másodpercznyi pozitív elektromozás zérusról 51·60-ra emeli az érzékenységet. 5 másodpercznyi negatív elektromozást ezt újra eltünteti, míg 1 másodpercnyi pozitív elektromozás újra tetemes érzékenységet hoz létre.

4. táblázat.

	Kezelés	Észlelés ideje		Érzékenység
		óra	perc	
Szeptember 9.	fényhatás	5	35	5·55
	fényhatás	5	41	4·51
	fényhatás	5	44	4·36
	+ el. 10 sec.	5	51	29·62
	+ el. 60 sec.	5	59	44·78
	+ el. 300 sec.	6	9	78·40
A prep. eközben sötétben volt tartva				
Szeptember 11.	fényhatás	4	19	9·09
	fényhatás	4	21·5	7·08
	fényhatás	4	26	5·97
	fényhatás	4	31	5·33
	— el. 1 sec.	4	36	zérus
	+ el. 5 sec.	4	47·5	51·60
	— el. 5 sec.	4	60	zérus
	+ el. 1 sec.	5	13·5	43·24

Még több hasonló észlelésem van, a melyek mind azt mutatják, hogy a Se_0 preparatumok igen individualisan viselkednek, a minek okát a kevésbé jól definiált előállítási körülményekben látom. Ugyanis a lehűtés gyorsasága egy ólomlapon igen különböző.

Összefoglalás.

1. Megállapítottam, hogy az amorf és fémes szelén nagy fényérzékenységgel birnak.

2. A Se_{II} (fémes) fényérzékenysége előállítás után az idővel növekedik.

3. A Se_{II} fényérzékenysége fény hatására gyorsabban növekedik, mint sötétben.

4. A Se_{II} fényérzékenysége ritkitott térben való pozitív elektromozás által nagy mértékben növekedik; negativ elektromozás kezdetben növekedést, további elektromozások kifáradást (a teljes érzéketlenségig) hoznak létre.

5. Szabad levegőn való negatív elektromozás kifáradást hoz létre, pozitiv elektromozás az érzékenységet növeli.

6. Mindkét hatás olyan, hogy az idővel magától megszűnik.

7. Az amorf szelén (Se_0) érzékenysége fényhatására csökken és sötétben megújhodás áll be.

8. Negatív, illetőleg pozitív elektromozások úgy levegőn, mint légritkitott térben kifáradást, illetőleg megújhodást hoznak létre, mely hatások rövid idő alatt maguktól megszűnnek.

9. Ritkított térben való negatív elektromozás fémeken kifáradást hoz létre.

*

Ezen dolgozat a Kolozsvári Ferencz József Tudományegyetem természettani intézetében készült és kedves kötelességemnek teszek eleget, a mikor itt is hálás köszönetemet fejezem ki dr. Tangl Károly tanár úrnak azon sok útbaigazításért és tanácsért, a mellyel munkálkodásomat támogatta.

Brünn, 1912, január hó.

Gyulai Zoltán.

A FÉMRÁCSOK ÁLTAL ELHAJLITOTT FÉNY POLÁROSSÁGÁRA VONATKOZÓ VIZSGÁLATOKRÓL.

I. Bevezetés.

A rácsok által elhajlított fény polárosságával már ismételten foglalkoztak a fizikusok.

Üvegrácsokon már ARAGO s utána számosan végeztek idevágó kutatásokat, míglen újabban FRÖHLICH I. egyetemi tanár széles mederben folytatott vizsgálataival az üvegrácsokra vonatkozóan, — mint ismeretes, — a kérdések nagy részét tisztázta.

Fémrácsokat csak későbben kezdtek késziteni; az ilyeneken végzett kutatások ennélfogva természetszerűen csak későbbi időben veszik kezdetüket. Sőt tudomásom szerint fémrácsokon mindezideig csak két kutató végzett quantitativ méréseket: FRÖHLICH IZIDOR és KÖNIG WALTER.

FRÖHLICH[1] tükörfémből készült lapra karczolt CHAPMANN RUTHERFORD-féle rácsot használt kutatásaihoz s az ennek barázdált felülete által ferde beesés mellett directe visszavert fényben végezte kisérleteit, megmérvén *a rács egyik oldalán* úgy a beesési síkkal párhuzamos és arra merőleges összetévők között jelentkező relativ fázis-különbséget, mind pedig az amplitudóik viszonyát. Ezek a mérések natrium-fénynél, különböző beesési szögeknél, a beeső lineárisan polározott fény polározási síkjának különböző azimutjainál és végül a rács barázdáinak két különböző, t. i. a beesési síkra merőleges és avval pár-

[1] I. FRÖHLICH: Wied. Ann. 13. p. 133. 1881.

huzamos irányitása mellett eszközöltettek. A vizsgálatok kimutatták, hogy a visszavert fény minden esetben elliptikusan polározott és hogy polározási állapota lényegesen különbözik annak a fénynek polározási állapotától, a mely azonos geometriai viszonyok mellett a tükörfém síma, nem barázdált felületéről verődött vissza. Feltünő, hogy a visszavert fény akkor is elliptikusan volt polározva, ha a beeső fény a beesési síkra merőlegesen, vagy avval párhuzamosan volt polározva.

König[1] a fémrácsok által elhajlitott fény polározási állapotára vonatkozóan végzett vizsgálatokat. Ő szintén Chapmann-Rutherford-féle rácsot használt és $\theta = 30°$ beesési szögnél megvizsgálta a $+1$. rendű színképet $\lambda = 525$ $\mu\mu$-től $\lambda = 672$ $\mu\mu$-ig és $\theta = 80°$-nál a -1. és -2. rendű színképeket $\lambda = 430$ $\mu\mu$-től $\lambda = 627$ $\mu\mu$-ig, nemkülönben natrium-fényben több más színképet. Méréseinél a beeső lineáris fény polározási síkja a beesés síkjával 45°-os szöget képezett. König abban foglalja össze vizsgálatainak eredményét, hogy az elhajlított fény elliptikusan van polározva, hogy a relativ fázis-különbségek általában 0-tól $\frac{\lambda}{2}$-ig növekednek, ha az elhajlítás síkjában a negativ rendszámú színképektől a pozitiv rendszámuak felé haladunk és végül, hogy ha Ψ-vel jelölöm az elhajlitott fény polározási síkja és a beesési sík által alkotott szöget, úgy $tg\Psi$ bármely beesési szög mellett úgy 1-nél nagyobb, valamint 1-nél kisebb értékeket is vehet fel.

Ez az utóbbi jelenség Fröhlich vizsgálatai szerint a directe visszaverődött fénynél is jelentkezik, ha a beeső fénynél $tg\Psi = 1$, a beesés szögét pedig kellőképen megválasztjuk.

A teljesség okából végül még felemlítem, hogy H. E. I. G. du Bois[2] is vizsgálta ugyan a fémrácsok által directe visszavert fény polározási állapotát, ő azonban csak annak a megállapítására szorítkozott, hogy a visszavert fény erősen elliptikusan polározott.

---

[1] W. König: Wied. Ann. 17. p. 1016. 1882.

[2] H. du Bois: Wied. Ann. 46. p. 542. 1892.

Az ismertetett vizsgálatok tehát még nem derítették fel a szóban forgó jelenségeket egész teljességükben; kivánatosnak mutatkozott ennélfogva a szükséges vizsgálatok kiterjesztése. Erre vállalkoztam VOIGT WOLDEMAR dr. göttingeni egyetemi tanár, az ottani természettani intézet egyik igazgatójának tanácsára és kezdésére.

Első tennivalóm a rendelkezésre álló tapasztalati anyagnak szaporitása volt, még pedig az áttekinthetőség céljából oly irányú szaporitása, hogy a mérések azonos beesési szög mellett az elhajlitás révén jelentkező színképeket mennél nagyobb kiterjedésükben és folytonosságukban felöleljék. A használatban lévő fémrácsok állandója általában kicsiny s ennek következtében azonos beesési szög mellett egy és ugyanazon szinű szinkép az elhajlitás szögének csak kevés számú értékénél jelentkezik. Hogy méréseim ennélfogva hézagosak ne legyenek, az egyes színképek vörös és ultraviolett végei felé addig kellett őket kiterjesztenem, míg a különböző rendű színképek részei egymást fedték. Méréseimet tehát különböző hullámhosszúságú fényben végezvén, számot kellett vetnem a rácsanyag törésmutatójának, n-nek, valamint az absorptio mutatójának, $\varkappa$-nak, a dispersiójával.

A jelenségeknek szemmel való megfigyelése mellett azonban a méréseknek ily arányú kiterjesztése, különösen az alacsony rendű színképekben, nem lett volna lehetséges, mert az emberi szem már körülbelül $\lambda = 440—450$ $\mu\mu$ körül a megfigyelésben hamar kifárad. A színkép ultraviolett részeiben ennélfogva a megfigyelésre a VOIGT-féle fényképező módszert alkalmaztam. Méréseimet, a mi tudomásom szerint idáig még nem történt, a rács mindkét «oldalára» terjesztettem ki, még pedig abból a célból, hogy ily módon az elhajlitott fény polározási állapotában a rács két «oldalán» fellépő esetleges dissymmetriáknak nyomára jőjjek. Ily dissymetriáknak a jelentkezése pedig azért volt valószinű, mert FRÖHLICH[1] vizsgálatai nyomán ismeretes

[1] I. FRÖHLICH: Wied. Ann. 15. p. 576. 1882.

volt, hogy az ily rácsok által elhajlított fény intensitásának eloszlása dissymmetrikus.

Feladatom másik része volt: az egybegyüjtött kisérleti anyagot Lord Rayleigh-nek 1907-ben megjelent rácselmélete kapcsán az elméletben lehetően értékesíteni.

Ily irányú kisérletet, Réthy Mór elméleti fejtegetései nyomán, már König tett. Az általa használt képletek azonban, bár egyes esetekben a kisérletek eredményének előállítására alkalmasaknak bizonyultak, nem vetettek számot a rács anyagának optikai tulajdonságaival, viszont szükségessé teszik állandóknak empirikus meghatározását.

Rayleigh két, az elektromágneses fényelmélet alapján álló rácselméletet közöl munkájában. Ezek az elméletek egyes a rács anyagára és a rács barázdájának profiljára vonatkozó korlátozó feltevésekből indulnak ki, a mely feltevések czélja: a fényelmélet differencziálegyenletének határfeltételeit az adott esetekben egyszerűsíteni. Az elméletek elseje tökéletesen visszaverő, a második pedig tökéletesen átlátszó anyagból készült rácsokra van szabva.

Reám nézve az előbbi birt fontossággal. Kisérleteim eredményeit tehát az első elmélettel hasonlítottam össze és ez az összehasonlítás sok esetben alig qualitativ megegyezést eredményezett kisérlet és elmélet között. Ez a körülmény arra indította Voigt tanárt, hogy a Rayleigh-féle elmélet alkalmazhatóságát részlegesen visszaverő anyagból készült rácsokra is kiterjessze. Czikkem második részében kisérleteim eredményét Voigt elméletével hasonlítom össze és ott ki fog tünni, hogy ő általánosításával a tényleg fennforgó viszonyokhoz lényegesen közelebb jutott. Tekintve, hogy a Voigt-féle képletek egy speczialis esetként Rayleigh képleteit is tartalmazzák, e helyen csak a Voigt-féle rácselméletet fogom rövid vonásokban vázolni.

II. Az optikai rácsok Rayleigh-Voigt-féle elmélete.

A RAYLEIGH-VOIGT-féle elmélet, mint a már mondottakból is kitünik, nem teljesen szigorú elmélete az optikai rácsoknak, amennyiben úgy eredeti, mind pedig tökéletesbített alakjában bizonyos korlátozó feltevésekből indul ki. Alkalmazása tehát szigorúan véve csakis akkor van helyén, ha a valóságban fennforgó viszonyok a feltevéseknek mennél jobban megfelelnek.

A feladat ugyanis az, hogy a fénynek az isotrop és átlátszó közegben való tovaterjedését leiró differencziálegyenlet megoldásaival a rács felületét alkotó, periodikusan görbített felület mentén kielégíttessenek azok a határfeltételek, melyek a fényhullámoknak két közeg határán való átvonulására nézve érvényesek.

RAYLEIGH[1] már most egyrészt a határfeltételeket egyszerűsítette abból a feltevésből indulva ki, hogy a rács anyaga tökéletesen veri vissza a fényt, vagyis komplex törésmutatója $\mathfrak{n} = \infty$, másrészt pedig a differencziálegyenlet megoldásai által az említett módon egyszerűsített határfeltételeket is csak bizonyos megközelítésben elégítette ki, miután egy további feltevése az volt, hogy a rács barázdáinak mélysége a fény hullámhosszához képest kicsiny. Ezeknek a feltevéseknek elsejét VOIGT[2] mellőzte és $\mathfrak{n}$ bármely véges értékére, vagyis részlegesen visszaverő rácsokra is alkalmazható elméletet fejtett ki.

Következő fejtegetéseimben oly coordináta-rendszer fog alapul szolgálni, melynek x, y-síkja tartalmazza a rács síkját és melynek y-tengelye a barázdákkal párhuzamos. A rács felülete, $z = \zeta$, ebben az esetben csakis x-nek periodikus függvénye, tehát egy FOURIER-sor

$$\zeta = \mathsf{S}_k \zeta_k e^{ikpx} \tag{1}$$

[1] Lord RAYLEIGH: On the dynamical Theory of Gratings. Proc. Roy. Soc. (A) 79. p. 532. 1907.

[2] W. VOIGT: Beiträge zur Lord Rayleigh'schen Theorie der Gitterbeugung. Göttinger Nachrichten 1911.

alakjában állitható elő. Az összegezést ki kell terjeszteni k öszszes egészszámú értékeire $-\infty$-től $+\infty$-ig, zérust kivéve. $\varepsilon=\frac{2\pi}{p}$ a rács állandója, melynek viszonya a fény hullámhosszához, λ-hoz, bármekkora lehet. Valós számokkal fejezve ki a coefficienseket

$$\zeta_k=\tfrac{1}{2}(c_k-is_k) \quad \text{és} \quad \zeta_{-k}=\tfrac{1}{2}(c_k+is_k). \tag{2}$$

Jelöljük a rács barázdáival párhuzamos (komplex) mágneses vector-összetevőt $\mathfrak{B}$-vel, a barázdákkal párhuzamos (komplex) electromos vectorösszetevőt $\mathfrak{V}$-val és különböztessük meg a beeső fényhullámokat e indexszel, a visszavert és elhajlítva visszavert fényhullámokat r indexszel, végül a megtört és megtörve elhajlított fényhullámokat d indexszel; akkor a határfeltételeket a következőképen írhatjuk:

$$\overline{\mathfrak{B}_e}+\overline{\mathfrak{B}_r}=\overline{\mathfrak{B}_d},$$

$$n^2\left(\frac{\partial\,\overline{(\mathfrak{B}_e+\mathfrak{B}_r)}}{\partial z}-\frac{\partial\,\overline{(\mathfrak{B}_e+\mathfrak{B}_r)}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}\right)=\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}_d}}{\partial z}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{B}_d}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx} \tag{3}$$

és

$$\overline{\mathfrak{V}_e}+\overline{\mathfrak{V}_r}=\overline{\mathfrak{V}_d},$$

$$\left(\frac{\partial\,\overline{(\mathfrak{V}_e+\mathfrak{V}_r)}}{\partial z}-\frac{\partial\,\overline{(\mathfrak{V}_e+\mathfrak{V}_r)}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}\right)=\frac{\partial\overline{\mathfrak{V}_d}}{\partial z}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{V}_d}}{\partial x}\frac{d\zeta}{dx}. \tag{4}$$

A barázdákkal párhuzamosan és reájuk merőlegesen polározott hullámokra vonatkozó határfeltételek tehát csak egy állandó tényezőben különböznek egymástól és ennek következtében a két eset együtt tárgyalható.

Jelölje

$$\mathfrak{E}\cdot e^{i\mu(\alpha x+\gamma z)}, \tag{5}$$

a rács barázdáival párhuzamosan polározott beeső síkhullámot,

$$\mathfrak{R}e^{i\mu(\alpha x-\gamma z)}+(\mathsf{S})\,\mathfrak{R}_h e^{i\mu(\alpha_h x+\gamma_h z)} \tag{6}$$

a visszavert és visszaverve elhajlított hullámokat, végül

$$\mathfrak{D}e^{i\mu(\alpha x+\nu z)}+(\mathsf{S})\,\mathfrak{D}_h e^{i\mu(\alpha_h x+\nu_h z)}, \tag{7}$$

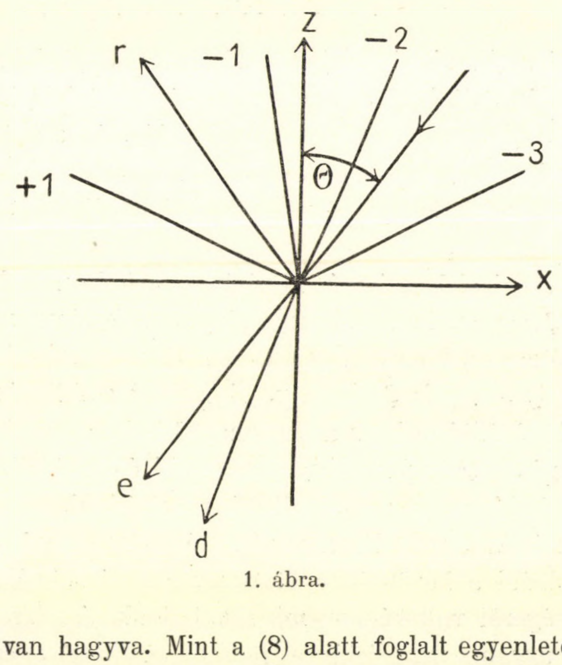
a megtört és megtörve elhajlított fényhullámokat; ezekben a kifejezésekben $\alpha = \sin\theta$, $\gamma = \cos\theta$ (lásd az 1. ábrát),

$$a_h = a + h\frac{\lambda}{\varepsilon} = a + hl, \tag{8}$$

λ a fény hullámhossza,

$$\gamma_h = \sqrt{1-a_h^2},\quad \nu = \sqrt{n^2-a^2},\quad \nu = \sqrt{n^2-a_h^2}.$$

Az időt tartalmazó tényező $e^{i\mu\omega t}$, mely az (5), (6) és (7) alatt leírt kifejezések mindegyikében fellép, az egyszerűség kedvéért el van hagyva.



1. ábra.

Mint a (8) alatt foglalt egyenletek mutatják, a tovaterjedés irányára vonatkozóan az elemi elmélet eredményei már fel vannak használva; $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$ jelentik a barázdákra merőlegesen rezgő electromos összetévők amplitudóit a beeső, illetőleg a visszavert és megtört hullámoknál, $\mathfrak{R}_h$ és $\mathfrak{D}_h$ a barázdákra merőlegesen rezgő electromos összetévők amplitudóit a h-ad rendű visszavert és megtörve elhajlított színképekben.

A barázdákra merőlegesen polározott hullámokat képviselő kifejezések az (5), (6) és (7) alatt foglaltakhoz hasonlók; csakhogy $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{R}_h$ és $\mathfrak{D}_h$ helyére a barázdákkal párhuzamosan rezgő electromos összetévők amplitudói $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{R}'_h$ és $\mathfrak{D}'_h$ kerülnek. Az (**S**) összegezést ki kell terjeszteni h mindazon értékeire, a melyek a (8) alatt foglalt relatióval és a

$$-1 < a_h < +1 \tag{9}$$

feltétellel összeférők; (**S**) tehát mindenkor csak kevés számú taggal bir.

Az (5), (6) és (7) alatt foglalt kifejezéseket most be kell helyettesíteni a (3) alatti határfeltételekbe, a barázdákra merőlegesen polározott hullámokra vonatkozó megfelelő kifejezéseket pedig a (4) alatt foglalt határfeltételekbe és e határfeltételeknek ki kell elégítve lenniök, ha az exponentiális függvényekben fellépő z helyébe ζ-nak (1) alatt adott értékét helyettesítjük.

A határfeltételek szigorú kielégítése azonban nehézséggel jár, mert ζ nagyon bonyolult függvénye x-nek. Rayleigh ennélfogva feltételezte, hogy *a fény hullámhosszához képest a barázdák mélysége, vagyis ζ, kicsiny.* E mellett a feltevés mellett azután a határfeltételekben az exponentiális függvényeket ζ hatványai szerint, ζ^2-ig bezáróan, sorba fejti és a feltételeket ily módon csak bizonyos megközelítésben elégíti ki.

Tagadhatatlan, hogy Rayleigh feltevése kissé merész, amennyiben például a közönséges Rowland-féle rácsoknál a barázdák mélységéről voltaképpen mit sem tudunk. A mikroskopikus vizsgálat ugyanis legfeljebb a barázda szélessége és a rács állandójának viszonyáról adhat felvilágosítást. Wood és Trowbridge rácsainál, hol a barázda mélységét a rács állandójának nagysága (0·012 mm) következtében meg lehetett állapítani, látni fogjuk, hogy a tekintetbe jövő közepes hullámhosszakra ($\lambda = 0{\cdot}004$—$0{\cdot}006$ mm) vonatkozóan Rayleigh eme feltevése nem fedi valami nagyon jól a fennforgó tényleges viszonyokat.

Mindazonáltal, jobb hijján, Voigt is magáévá tette ezt a feltevést és a (3) és (4) alatti *szigorú* határfeltételeket ő is csak a Rayleigh-féle megközelítésben elégiti ki és veszi a további tárgyalás alapjául. A további számítás részleteivel nem óhajtok itt foglalkozni és csak azokat a kifejezéseket fogom felsorolni, melyek ebből az elméletből a rács barázdáival párhuzamosan és reájuk merőlegesen polározott, directe visszavert és elhajlítva visszavert hullámok amplitudóira adódnak. A directe visszavert hullám amplitudói Voigt szerint:

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{n}\gamma+1)=\mathfrak{E}\Big[(\mathfrak{n}\gamma-1)-\frac{2\mu^2\gamma\mathfrak{n}^2}{\mathfrak{n}\gamma+1}(\mathbf{S})\frac{\zeta_h\zeta_{-h}}{\mathfrak{n}\gamma_h+1}$$
$$\Big[\mathfrak{n}(1-\alpha a_h)^2+\gamma_h\big(1-2\alpha a_h-\tfrac{1}{2}(\alpha^2+a_h^2)\big)\Big]\Big]$$

és (10)

$$\mathfrak{R}'(\gamma+\mathfrak{n})=\mathfrak{E}'(\gamma-\mathfrak{n})$$
$$\Big[1-2\mu^2\gamma(\mathbf{S})\zeta_h\zeta_{-h}\frac{\big(\mathfrak{n}\gamma_h+\frac{1}{2}(\gamma^2+\gamma_h^2)\big)}{\gamma_h+\mathfrak{n}}\Big].$$

Ezek a kifejezések első megközelítésben, vagyis, ha az (**S**) összeget elhagyjuk, a közönséges fémvisszaverődés képletei, de oly alakjukban, a melyekbe Drude egyszerűsítése (1 kicsiny mod. $\mathfrak{n}^2$ mellett) be van vezetve. A (**S**) összegek tehát azt az energiát képviselik, mely a directe visszavert fény rovására az egyes színképek közt oszlik meg. Ha ezekbe a (10) alatt adott kifejezésekbe $\mathfrak{n}=\infty$-t helyettesítjük, úgy Rayleigh formuláit kapjuk:

$$\mathfrak{R}\gamma=\mathfrak{E}\Big[\gamma-2\mu^2(\mathbf{S})\zeta_h\zeta_{-h}\frac{(1-\alpha a_h)^2}{\gamma_h}\Big]$$

és (11)

$$\mathfrak{R}'=-\mathfrak{E}'[1-2\mu^2\gamma(\mathbf{S})\zeta_h\zeta_{-h}\gamma_h].$$

A λ hullámhosszuságú k-adik színképben az amplitudók Voigt szerint:

$$\mathfrak{R}_k=\frac{2\mu\mathfrak{n}^2\gamma\mathfrak{E}}{(\mathfrak{n}\gamma+1)(\mathfrak{n}\gamma_k+1)}\Big\{i(1-\alpha a_k)\zeta_k$$
$$-\mu\Big(\sum_k\Big)[\mathfrak{n}(\gamma_h^2-gl a_h)+\gamma_h](1-\alpha a_h)\frac{\zeta_h\zeta_g}{\mathfrak{n}\gamma_h+1}\Big\}$$

és (12)

$$\mathfrak{R}'_k = -\,2\mathfrak{E}'\,\frac{\gamma(\mathfrak{n}-\gamma)}{(\mathfrak{n}+\gamma_k)}\left\{i\mu\zeta_k-\mu^2\Big(\sum_k\Big)\gamma_h\zeta_h\zeta_g\right\}$$

és ($\mathfrak{n} = \infty$) helyettesítése után:

$$\mathfrak{R}_k = \frac{2\mathfrak{E}}{\gamma_k}\Big\{i\,(1-a\alpha_k)\,\mu\zeta_k$$

$$-\mu^2\Big(\sum_k\Big)(\gamma_h^2-gl\alpha_h)\,(1-a\alpha_h)\frac{\zeta_h\zeta_g}{\gamma_h}\Big\} \qquad (13)$$

és

$$\mathfrak{R}'_k = -\,2\mathfrak{E}'\gamma\,\Big(i\mu\zeta_k-\mu^2\Big(\sum_k\Big)\gamma_h\zeta_h\zeta_g\Big).$$

Ezekben a kifejezésekben

$$\sum_k \psi_h\cdot\psi_g$$

oly $\psi_h\cdot\psi_g$ tagok összegét jelenti, melyekre nézve

$$h+g = k, \qquad (14)$$

a hol is tekintetbe jönnek k-nak mindazok az értékei, melyek a (8) és (9) alatt felsorolt feltételekkel összeférők.

Ha az elhajlított hullámok amplitudóinak kifejezéseiben elsőfokú tagokra szorítkozunk, vagyis ha a $\big(\sum_k\big)$ összegeket elhagyjuk, akkor a k-adik szinkép amplitudójának értékére csakis

$$\zeta_k = \tfrac{1}{2}\,(c_k - is_k)$$

van befolyással.

III. A megfigyelés módszerei.

Az imént ismertetett elmélet helyes voltát már most úgy vizsgálhatjuk, hogy azokat az adatokat, melyek az elhajlított fény polározási állapotát jellemzik, az elmélet alapján kiszámítjuk és a mérések eredményeivel összehasonlítjuk. A mérések feladata tehát az volt, hogy ezeket a jellemző adatokat, vagyis a beesés síkjával párhuzamos és arra merőleges elektromos összetevők között fennforgó relativ fáziskülönbséget, Δ-t, továbbá a fáziskülönbség kompenzálása után ismét lineárisan rezgő electromos vectornak a beesés síkjára vonatkoztatott kétszeres azimutját, 2ψ-t, meghatározzam. Az erre irányuló méréseimnél a beeső fény mindenkor lineáris polározású volt és polározási síkja a beesés síkjával 45°-nyi szöget zárt be; a beesési sík pedig mindenkor merőleges volt a rács barázdáira.

A bevezetésben jelzett okból Δ és 2ψ meghatározása úgy okuláris megfigyelés, mind pedig fényképezés útján történt. Az okuláris méréseket csillám-kompenzátorral ellátott FUESS-féle polarisatiós-spectrometeren végeztem.

A mi a fényképezés útján való megfigyelést illeti, legyen szabad ezzel a VOIGT-féle[1] mérési módszerrel már csak azért is bővebben foglalkoznom, mert tudtommal ez az első alkalmas eljárás az ultraviolett sugarak polárossági állapotának aránylag egyszerű meghatározására s többek között pl. a fémek dispersiójára vonatkozó vizsgálatoknak az ultraviolett sugarakra egészen $\lambda = 250\,\mu\mu$-ig való kiterjesztése szintén csak ezzel az eljárással vált lehetővé.

Az eljárás lényege a következő.

Az elliptikusan polározott fényt először BABINET-féle kompenzátoron bocsátjuk keresztül, melynek ék-élei, mondjuk, a beesés síkjával párhuzamosak. Ha a BABINET-ből kilépő fényt alkalmasan beállított nicolon keresztül vizsgáljuk, úgy a beesés síkjával párhuzamosan az ismeretes fekete csíkok jelentkeznek. Ezek a csíkok jelzik azokat a helyeket, hol a BABINET-féle kompenzátorból kilépő fény lineárisan van polározva. Ha már most a BABINET-féle kompenzátor és a nicol közé, ék-éleivel a beesés síkjára merőlegesen, úgynevezett forgató-kompenzátort[2] helyezünk, úgy az említett fekete csíkok mentén a két kom-

---

[1] W. VOIGT: Phys. Zeitschr. 2. p. 303. 1901.

[2] W. VOIGT: Magneto und Electrooptik. p. 138.

A forgató kompenzátor quarzkristályból kivágott két ékből áll, melyek egymást derékszögű parallelepipedonná egészítik ki. Az egyik ék jobbraforgató, a másik balraforgató kristályból van kivágva, még pedig úgy, hogy a kristályok optikai tengelyei egymással párhuzamosak, de merőlegesek az ékek éleire és az ékeknek azokra a lapjaira, melyek a parallelepipedonnak is lapjait alkotják. (Lásd 1*a* ábra.)

penzátort elhagyó fény lineáris polározású marad, de a csíkok mentén a polározási azimut folytonosan változni fog, vagyis: nicolon keresztül vizsgálva a jelenséget a csíkok helyén diszkrét pontok sorait pillantjuk meg. Ezeknek a pontoknak egy fonálkeresztre, mint koordináta-rendszerre vonatkozó coordinátái egyszerű számítás útján megadják a kompenzátor-rendszeren áthatolt fény eredeti polározási állapotának adatait. A pontrendszert a fonálkereszttel együtt lefényképezzük és a pontok coordinátáit legegyszerűbben egy Zeiss-féle komparator segítségével a negativon mérjük ki.

Az eljárás tehát ultraviolett fényben addig a határig használható, a meddig a fényképező lemez érzékenysége terjed.

Megfigyeléseimnél, úgy az okularis, mint a fényképező mérési eljárás mellett is, a rácsra beeső fény monochromatikus volt. Fényforrásul a szükséges fényintensitáshoz képest vagy ívlámpát, vagy Nernst-lámpát használtam. A fényképező eljárást $\lambda = 347$ $\mu\mu$-től néha egészen $\lambda = 550$ $\mu\mu$-ig, az okuláris eljárást $\lambda = 447$ $\mu\mu$-től $\lambda = 668$ $\mu\mu$-ig alkalmaztam. Általában az okuláris mérések voltak a pontosabbak.

IV. A mérések anyaga és eredményei.

Méréseimet első sorban két kisebb (6×8 cm) eredeti Rowland-féle rácson végeztem. Ezek közül az egyiket Hauswaldt magdeburgi nagyiparos és fizikus engedte volt át a göttingeni intézetnek, míg a másikat Riecke tanár, a göttingeni fizikai intézet kisérleti osztályának igazgatója bocsátotta rendelkezésemre. Használtam azután méréseimhez még egy harmadik rácsot is, melyet Michelson chicagoi egyetemi tanár szivességének köszönhettem, ki azt saját osztógépén készítette volt.

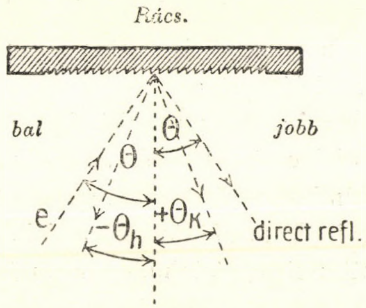
Mind a három rács tükörfémből volt készítve. A Rowland-féle rácsok állandója $\varepsilon = 0{\cdot}001761$ mm, a Michelson-féle rácsé pedig $\varepsilon = 0{\cdot}000500$ mm volt.

A két Rowland-féle rácsot a következőkben I-el és II-vel fogom jelölni. Elhajlási szögnek a következő

$$\sin\theta_k - \sin\theta = \frac{k\lambda}{\varepsilon} \qquad (15)$$

egyenlet által meghatározott θ_k szöget fogom nevezni.

A szerint, a mint θ a rács előtt a jobb vagy a bal quadransban van (lásd 2. ábra), azt mondom: az elhajlított sugár a rács jobb, illetve bal oldalán van. Ha a beeső sugár balfelől esik be, a directe visszavert sugár jobbfelől van és az összes jobboldali θ_k-ák (15) szerint positiv előjelűek, míg az összes baloldali θ_k-ák negativ előjelűek.



2. ábra.

Legelőször az I. rácsot vizsgáltam meg, még pedig abból a szempontból, vajjon az elhajlított fény bir-e egyáltalában egyértelműen meghatározott polározási állapottal, ha a beeső fény lineárisan polározott? Ilynemű vizsgálatokra nagyon alkalmas az az eszköz, melyet a fényképező mérési eljárásnál használtam. Ezen az eszközön a fényképező kazetta félretolható és egy, a kazetta mögé szerelt nagyító lencsén keresztül az interferentia folytán létrejött pontrendszer kényelmesen szemlélhető. Ha már most az analizált fény egyértelműen meghatározott elliptikus vagy lineáris polározási állapottal bir, úgy a pontrendszer a világos alapon élesen, absolut sötéten jelentkezik. Ha több, különböző polározási állapottal biró fénynyaláb keverve van, úgy a pontrendszer elmosódott. A szóban forgó qualitativ kérdés tehát ily módon könnyen eldönthető. A pontoknak a fonálkereszthez viszonyított helyzete viszont egyszerű módon jelzi az irányt, a melybe a fáziskülönbség kompenzálása után fellépő lineáris polározás síkja az elhajlás folytán elforgatva lett.

Ezeknek a tájékoztató vizsgálatoknak az eredménye az volt, hogy az I. rács által elhajlított fény, nem mindenütt ugyan, de általánosságban egyértelműen meghatározott polározási állapottal bir.

A tájékoztató vizsgálatok megtörténtével rendszeres méréseket végeztem $\theta = 0^\circ$ és $\theta = 65^\circ$ beesési szögek mellett a rács mindkét oldalán. A rendszeres mérések során kitünt, hogy az elhajlított fény a rács egy bizonyos meghatározott helyén nem bir egyértelműen meghatározott polározási állapottal. Ez a hely a rács baloldalán, $\theta_k = 29{\cdot}5^\circ$ táján volt. Ha $\theta = 0^\circ$, úgy ezen a helyen a $\lambda = 440$ $\mu\mu$ hullámhosszúságú 2-od rendű színkép van, $\theta = 65^\circ$ esetében pedig, ha θ a jobboldalon van, a $\lambda = 670$ $\mu\mu$ hullámhosszúságú —1-ed rendű színkép. θ_k öszszes egyéb értékeinél, nemkülönben a jobboldali $\theta_k = 29{\cdot}5^\circ$ körül az elhajlított fény egyértelműen meghatározott polározással birt.

A polározási állapotban megállapított dissymmetriával párhuzamosan az elhajlított fény intensitásának az eloszlásában is nagy dissymmetria mutatkozott. Merőleges beesésnél pl. a rács baloldalán 2—3-szor annyi ideig kellett exponálnom, hogy használható photogrammokat nyerjek, mint a rács jobboldalán. Azon az oldalon tehát, melyen a depolarisatio jelentkezett, az intensitás is kisebb volt.

A mérések számszerű eredményeit az 1—4. táblázatok tartalmazzák. A könnyebb áttekinthetőség, valamint az elmélettel való könnyebb összehasonlítás czéljából a számszerű adatokat grafikusan is ábrázoltam. Az 1—4. táblázatok eredményei a 3—6. ábrákban vannak feltüntetve.

A görbék részletesebben tüntetik fel a polározási állapotban fellépő dissymmetriát és közvetve az intensitás eloszlásának a dissymmetriáját is, mert a rács fényerős oldalán sokkal több mérés volt végezhető.

1. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 0$. Fényerős oldal.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_2	Δ_2	$2\ \psi_2$	Θ_3	Δ_3	$2\ \psi_3$	Θ_4	Δ_4	$2\ \psi_4$
347	23°14′	—	94°30′	36°15′	166°	93°20′	—	—	—
361	24 15	169°	94	38 00	167	93 18	55° 6′	158°	86°14′
388	26 7	170 50′	96 30	41 20	170 40′	93 22	61 45	156 40′	87 34
398	26 52	170 20	97 30	42 45	170 10	92 38	64 45	—	—
415	28 4	170	98 32	45 00	168 20	92 5	70 30	156 40	86 51
425	—	—	—	—	—	—	75 00	155 30	85 48
430	29 15	168	97 40	47 4	166 20	91 00	77 45	—	—
435	—	—	—	—	—	—	81 15	155	84 35
438	—	—	—	—	—	—	84 45	155	84
447	30 30	173 30	97 30	49 33	170 10	92 20			
468	32 5	174 30	95 36	53 00	168 30	93 30			
480	33 00	175 30	95 30	54 55	167 48	93 10			
492	34 00	174	93 43	57 00	165	93 00			
508	35 11	173 50	92	59 46	163 8	90 00			
533	37 18	173 38	91 20	65 30	160 38	88 00			
550	38 37	—	90 50						
570	40 22	—	90 30						
588	41 50	173 46	90						
668	49 20	169 10	89						

2. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 0$. Sötét oldal.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_2	Δ_2	$2\ \psi_2$	Θ_3	Δ_3	$2\ \psi_3$
388	26° 7′	162°	89°30′	41°20′	198°	108°11′
398	26 52	162 30′	87	42 45	178	—
415	28 4	163 40	—	45 00	180	111 10
430	29 15	—	—	47 4	165	107
447	30 30	165 40	—	49 33	165	101 44
468	32 5	180	118	53 00	164	97 42
480	33 00	187 40	116 30	54 55	162 30′	93 33
492	34 00	180	114 20	57	161	92 2
508	35 11	160 30	110 16	59 46	155	91 24
533	37 18	157 33	99 35	65 30	147 3	89

3. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 65°$. Fényerős oldal.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\psi_{-2}$	Θ_{-3}	Δ_{-3}	$2\psi_{-3}$
347	45°	98°30′	93°32′	30°50′	121°	92°54′	18°21′	133°42′	91°42′
361	44 30′	105	96 26	29 45	125 30′	91 38	16 55	140 20	94
375	43 50	110 10	101 6	28 38	129	92 52	15 30	144 44	94 22
388	43 15	111 50	103 50	27 48	130 55	93 36	14 15	144 30	—
398	42 55	108	107 10	27	127 46	96 40	13 10	139 27	95
415	42 5	106	110	25 50	125 40	97 4	11 36	140 30	94 10
430	41 30	110	110 50	24 40	132 8	96 26	10	141 46	94 24
447	40 40	114 35	109 20	23 30	133 40	96 30	8 16	151 30	94 36
468	39 45	114 50	109 50	22	139	95 38			
480	39 20	115	110	21 14	137 27	94 46			
492	38 45	116 30	109 30	20 25	137 50	93 48			
508	—	—	—	—	—	—			
533	37	121	107	17 22	143 10	92 42			
550	36 30	122 30	103 30	16 22	147 10	89 42			
570	35 35	124 10	101	14 55	147 30	87 42			
610	34	126 35	109 20	12 20	148 10	87 7			

4. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 65°$. Sötét oldal.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\psi_{-2}$	Θ_{-3}	Δ_{-3}	$2\psi_{-3}$
415	42° 5′	118°30′	115° 8′	25°20′	107°50′	108°52′	11°36′	116°12′	98°24′
430	41 30	119 37	115 56	24 40	113 19	108 44	10	123 30	95 52
447	40 40	126 40	118 34	23 30	120 50	108 16	8 16	135 30	94 10
468	39 45	130 8	119 16	22	123 20	107			
492	38 45	133 7	121 2	20 25	124 40	102 44			
508	38	138 4	121	19 15	129 30	100 30			
533	37	140 20	123 14	17 22	131 30	97 30			
480	39 20	130 40	120 48	21 14	123 40	103 36			
550	36 30	141	121 26	16 22	133 30	95 2			

Ilyen dissymmetrikus rács természetesen jobban felel meg eredeti rendeltetésének, mint egy symmetrikus, mert a beeső energiát kevesebb színképbe összpontosítja és bizonyára e miatt a tulajdonsága miatt írta Rowland az I. rács kazettájának fedelére, hogy: «this is one of the most beautiful and perfect gratings, ever ruled on Rowland's engine». Nekem azonban inkább oly rácsra volt szükségem, melynek dissymmetriája a vizsgált jelenségeket mennél kevésbbé komplikálja. Ily szempontból jobban megfelelt a II. rács, melynek dissymmetriája sokkal kisebb volt és a mely kivétel nélkül mindenütt egyértelműen meghatározott polározási állapottal biró elhajlított fényt szolgáltatott. Rendszeres méréseket $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ és $\theta = 60°$ beesési szögeknél végeztem. A mérések eredményei az 5—10. táblázatokban találhatók és a 7—14. ábrákban vannak rajzban feltüntetve. A görbék sokkal rendesebb és symmetrikusabb alakúak, mint az I. rácsnál; mindazonáltal találunk egyes dissymmetriákat is, különösen az első és másodrendű színképekben.

Az utóbbi rácscsal még egy másik mérési sorozatot is végeztem, mely sorozatban a méréseket mindig ugyanazon rendszámú ($\pm$ 1) színképben és ugyanoly színű ($\lambda = 588$ $\mu\mu$) fényben, de változó beesési szög mellett eszközöltem. Az eredményeket a 11. számú táblázaton közlöm. Ezenfelül még $\theta = 65°$ beesési szög mellett mindkét rácsnak mindkét oldalán a directe visszavert fényben végeztem méréseket, melyek eredményeit a 12. és 13. táblázatok adják. A 14. táblázat végül a $\theta = 70°$ beesési szögnél a Michelson-féle rács által elhajlított fényben végzett mérések eredményeit szolgáltatja.

A mérések pontossága egyébként nagyon különböző. Általánosságban Δ-nál $\pm 1/2°$-tól $\pm 2°$-ig, 2ψ-nél $\pm 10'$-től $\pm 30'$-ig változott a pontosság a szerint, hogy a mérés hányadrendű színképben, milyen színű és milyen mértékben monochromatikus fénnyel és mily elhajlási szög mellett végeztetett. A méréseknek ezt a pontosságát mindazonáltal tökéletesen kielégítőnek kell tekintenünk, ha figyelembe vesszük mindazokat a

5. táblázat.

II. Rács. $\Theta = 0$. Jobb oldal.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_2	Δ_2	$2\,\psi_2$	Θ_3	Δ_3	$2\,\psi_3$	Θ_4	Δ_4	$2\,\psi_4$
347	23°14′	193° 0′	95°32′	36°15′	170°30′	90°54′			
361	24 15	185 54	—	38 00	174 26	91 14			
388	26 7	181 34	95 33	41 20	172 24	92 41	61°45′	157° 9′	96°52′
398	26 52	183 40	95 48	42 45	171 16	92 45	64 45	149 26	91 54
415	28 4	184 11	95 30	45 00	167 30	93 20	70 30	144 3	84 11
425	—	—	—	—	—	—	75	140 8	76 20
430	29 15	185 43	97 8	47 4	166 8	91 10	77 45	—	—
435	—	—	—	—	—	—	81 45	132 43	69 45
447	30 30	186 30	97 12	49 33	163 5	93 20			
468	32 5	185 30	101 10	53 00	156 8	91 15			
480	33 00	183 20	101 14	54 55	151 40	84 50			
492	34 00	180 50	100 55	57 00	148 30	81			
508	35 11	178	101 11	59 46	148	73 37			
533	37 18	173	97 32	65 30	146 26	65 6			
588	41 50	180	94 40	88	125 57	52 38			
668	49 20	155	89 5	—	—	—			

6. táblázat.

II. Rács. $\Theta = 0$. Bal oldal.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_2	Δ_2	$2\,\psi_2$	Θ_3	Δ_3	$2\,\psi_3$	Θ_4	Δ_4	$2\,\psi_4$
347	23°14′	183°45′	96°47′	36°15′	180°00′	98°25′	52°00′	157°10′	87°25′
361	24 15	181 38	96 24	38 00	181 43	98 56	55 6	153 12	86 23
388	26 7	179 23	96 59	41 20	172 54	97 20	61 45	150 20	83 56
398	26 52	179 27	96 12	42 45	173 22	95 4	64 45	147 53	72 26
415	28 4	178 54	97 8	45 00	170 5	90 42	70 30	149	64 46
425	—	—	—	—	—	—	75 00	145 13	57 9
430	29 15	178 53	96 21	47 4	169 20	87 2	77 45	—	—
435	—	—	—	—	—	—	81 45	137 20	53 10
447	30 30	180 43	98 49	49 33	167 9	85 30			
468	32 5	178 42	101 40	53 00	164 26	80 57			
480	33 00	173 38	100 38	54 55	163 22	74 48			
492	34 00	172 10	101 57	57 00	162 6	73 17			
508	35 11	171 50	97 30	59 46	158 17	69 15			
533	37 18	167 17	93 16	65 30	152	61 00			
588	41 50	167 30	86 54	—	—	—			
668	49 20	154 8	80 33	—	—	—			

7. táblázat.

$\Theta = 30°$. A beeső sugár a rács baloldalán van.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_1	Δ_1	$2\,\psi_1$	Θ_2	Δ_2	$2\,\psi_2$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\,\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\,\psi_{-2}$
347	44° 00′	174° 45′	126° 30′	63° 20′	146° 40′	114° 6′	17° 40′	184° 30′	91° 40′	6° 8′	183° 50′	98° 40′
361	44 50	172	126 20	65 30	142 30	113 47	17 10	182 18	93 20	5 10	179	99 20
388	46	168 40	129 20	70	136 40	112 47	16 15	181	96 40	3 26	176 40	100 10
415	47 20	159 40	131 5	76	118	104 53	15 20	177 50	99 30	1 40	174 20	98
430	—	—	—	81 15	112 30	96 45	—	—	—	—	—	—
435	—	—	—	84	111	93 27	—	—	—	—	—	—
438	—	—	—	86	109	92 12	—	—	—	—	—	—
447	49	161 40	128 20	—	—	—	14 15	180	98 30	—0 30	180	97 20
480	50 35	150 20	134 36	—	—	—	13 10	182 20	101 30	—2 35	179 30	99 40
508	52	131 20	132	—	—	—	12 13	178 10	104 10	—4 25	173 30	101 20
533	53 25	118 50	123	—	—	—	11 20	175 34	105 10	—6 5	170 40	100 20
570	55 40	121 15	110 26	—	—	—	10 9	171 10	104 50	—8 30	—	—
620	58 30	126 28	100 20	—	—	—	8 30	167 50	100 40	—	—	—
668	61 30	128 10	89 8	—	—	—	—	166 50	95 36	—	—	—

8. táblázat.

$\Theta = 30°$. A beeső sugár a rács jobboldalán van.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_1	Δ_1	$2\,\psi_1$	Θ_2	Δ_2	$2\,\psi_2$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\,\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\,\psi_{-2}$
347	44° 0′	165° 10′	105° 30′	63° 20′	128° 20′	106°	17° 40′	—	—	6° 8′	183°	98° 40′
361	44 50	162	107 17	65 30	126 10	107 40′	17 10	180°	107° 0′	5 10	181 20′	98
388	46	159 40	110 25	70	121	102 40	16 15	183 15′	110 30	3 26	179 30	97 10
415	47 20	151 40	111	76	118 30	97	15 20	179 50	113 40	1 40	174 10	96 20
430	—	—	—	81 15	116 20	92 5	—	—	—	—	—	—
435	—	—	—	84	115 20	90 45	—	—	—	—	—	—
447	49	151 54	110	—	—	—	14 15	181 10	106	—0 30	180	95 30
480	50 35	146 40	106 20	—	—	—	13 10	170 41	108 10	—2 35	185 50	95 40
508	52	140 40	104 10	—	—	—	12 13	171 28	113 40	—4 25		99
533	53 25	138 20	99 20	—	—	—	11 20	173 56	118 45	—6 5	169	98 30
570	55 40	138 59	95 13	—	—	—	10 9	177 35	119 40	—8 30	—	—
620	58 30	141 45	90	—	—	—	8 30	171 36	114	—	—	—
668	61 30	143 30	86 20	—	—	—	—	168 30	—	—	—	—

9. táblázat.

$\Theta = 60^\circ$. A beeső sugár a rács baloldalán van.

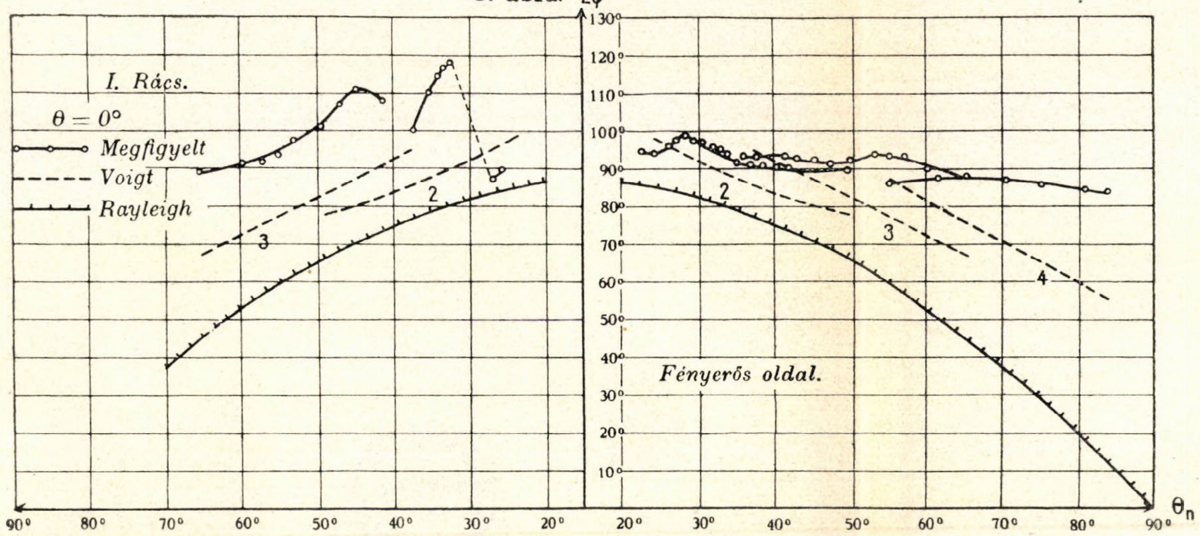
$\lambda\ \mu\mu$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\,\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\,\psi_{-2}$	Θ_{-3}	Δ_{-3}	$2\,\psi_{-3}$	Θ_{-4}	Δ_{-4}	$2\,\psi_{-4}$
347	42°	119° 0′	108° 45′	28°	131° 40′	110° 0′	16° 00′	145°		4° 20′		
361	41 20′	127	109	27	135	108 27	14 30	150	97° 2′	2 40	155° 20′	84° 4′
388	40 15	124 30	109 20	25 15′	138	106 7	12	150	91 20	— 0 50	154 20	78
415	39	121	109	23 20	136 30	103	9 10	151° 50′	86 42	— 4 20	152 20	73 2
447	37 45	126	105 20	21	144	97	6	153	80 20	— 8 10	158 25	68 20
480	36 30	127 50	101 40	18 40	143	90 55	2 45	154	74 44	—13	162 17	67 20
508	35 15	129	98	16 45	143 20	87 10	0	154 17	71 30	—16 40	163 50	66 50
533	34 15	131 30	95 45	15	147	83 15	— 2 30	155 40	69 2	—20 30	161 50	63 40
570	32 50	135 20	93 17	12 30	153	78 40	— 6	158	71 24	—	—	—
620	31	140 50	90 7	9 20	155	75 50	—11	154 20	64 50	—	—	—

10. táblázat.

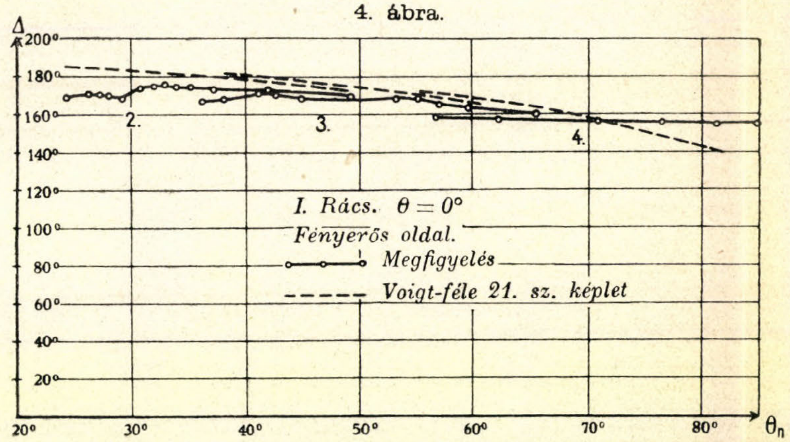
$\Theta = 60^\circ$. A beeső sugár a rács jobboldalán van.

347	42° 00′	132° 10′	130° 48′	28° 00′	152° 40′	112° 14′	16° 00′	—	—	4° 20′	—	—
361	41 20	135	132 22	27	153 30	113 19	14 30	153° 00′	98°	2 40	160°	97°
388	40 15	136	135 20	25 15	154 50	113 40	12	151	98 30′	— 0 50	161 10′	98 3′
415	39	122 40	139	23 20	151 20	114	9 10	—	—	— 4 20	—	—
447	37 45	114 10	133 37	21	148	111 9	6	148 50	89 40	— 8 10	165 2	91 30
480	36 30	109	123 10	18 40	144 30	109 22	2 45	148 30	84	—13	166 20	86
508	35 15	109 20	115 11	16 45	141 20	99 41	0	150 40	79 15	—16 40	167	82 24
533	34 15	113	107 12	15	142 10	95 2	— 2 30	152	76	—20 30	169 40	77 47
570	32 50	117 50	103 26	12 30	144 15	88 40	— 6	156	72 29	—	—	—
620	31	125 20	97 44	9 20	147 46	82 30	—11	157	68 27	—	—	—

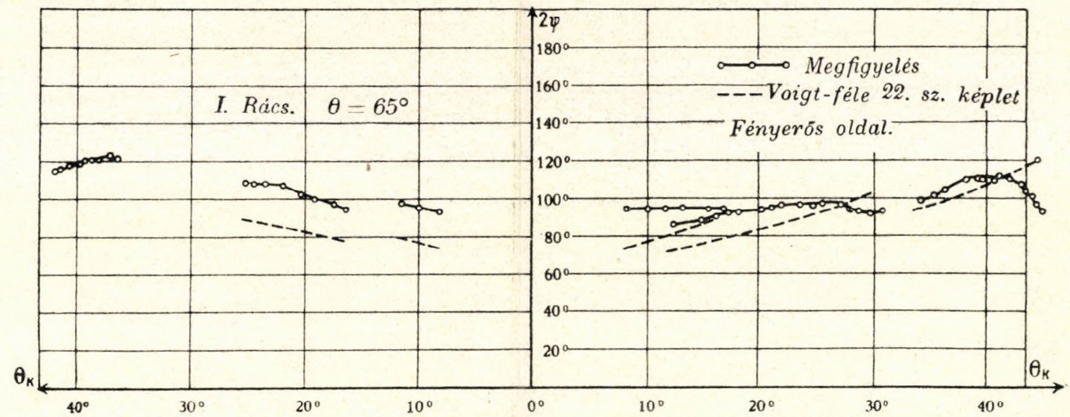
3. ábra.



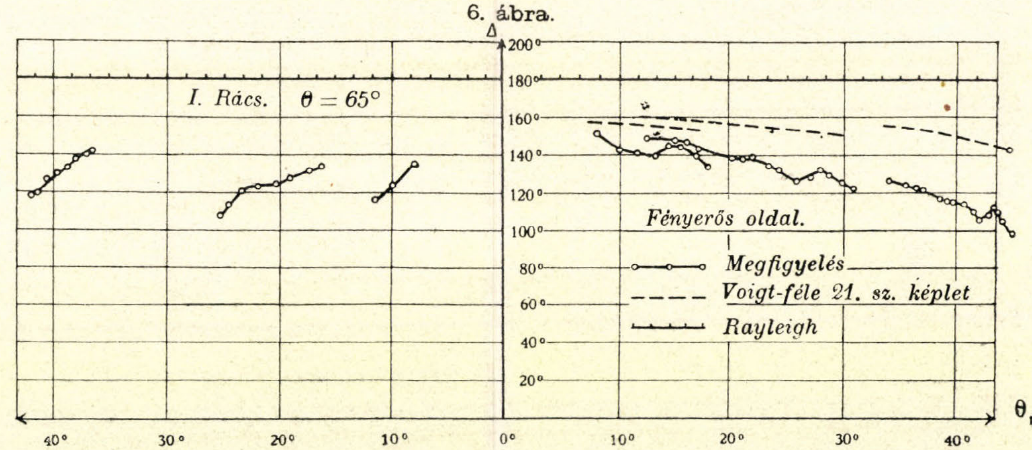
4. ábra.



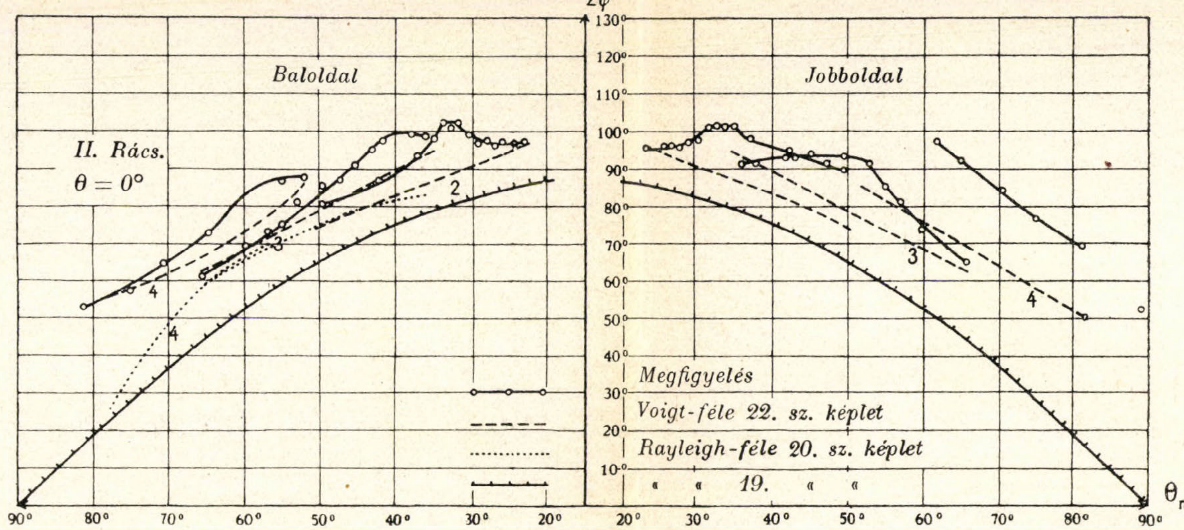
5. ábra.



6. ábra.

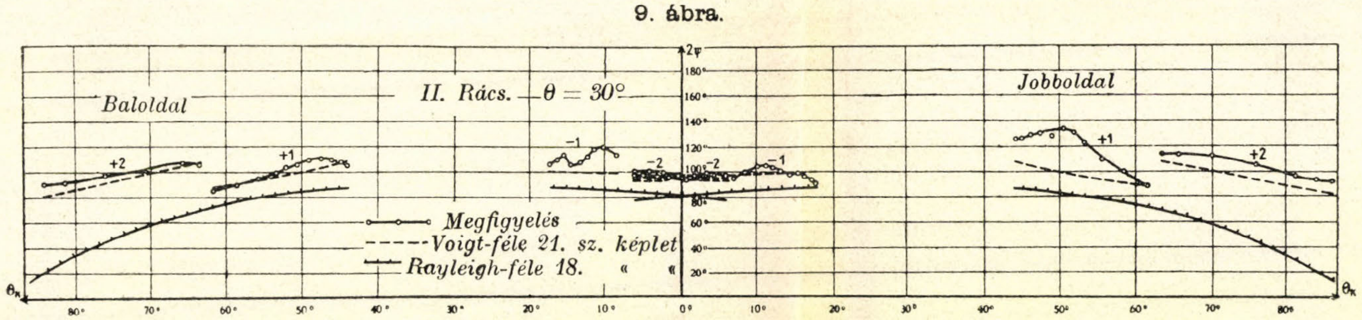


7. ábra.

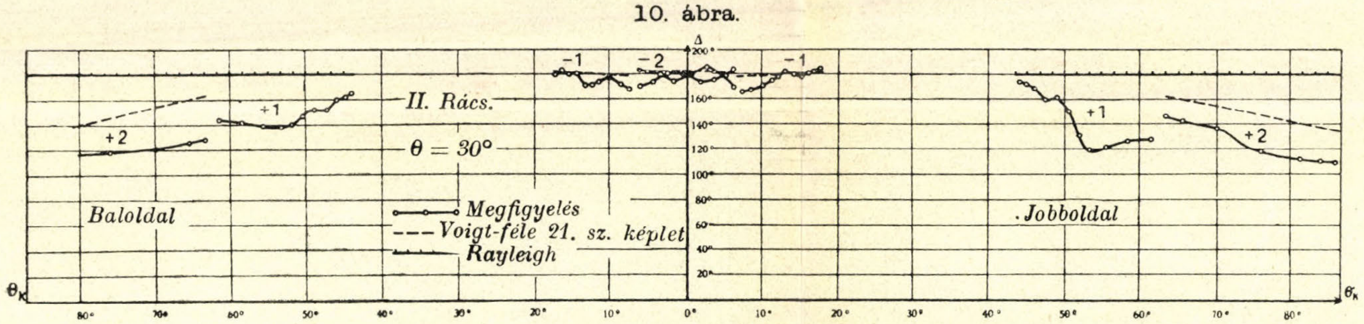


8. ábra.

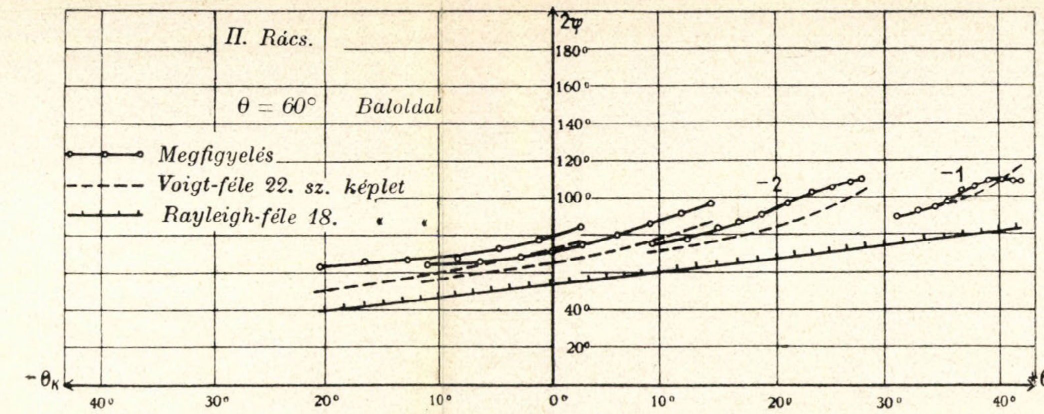
9. ábra.



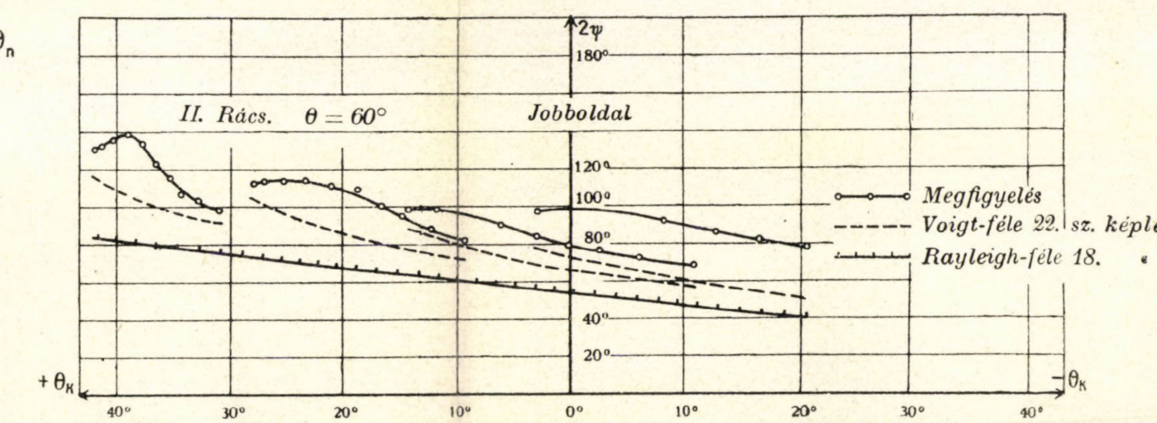
10. ábra.



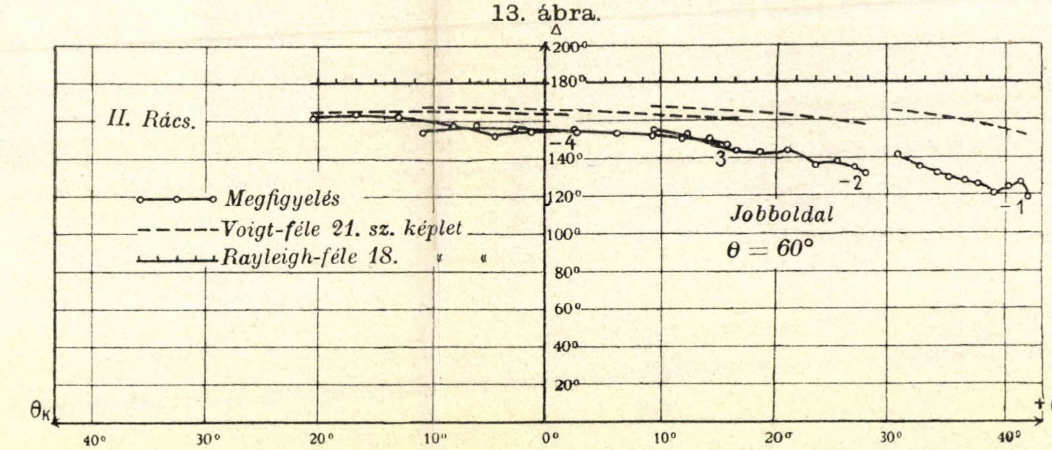
11. ábra.



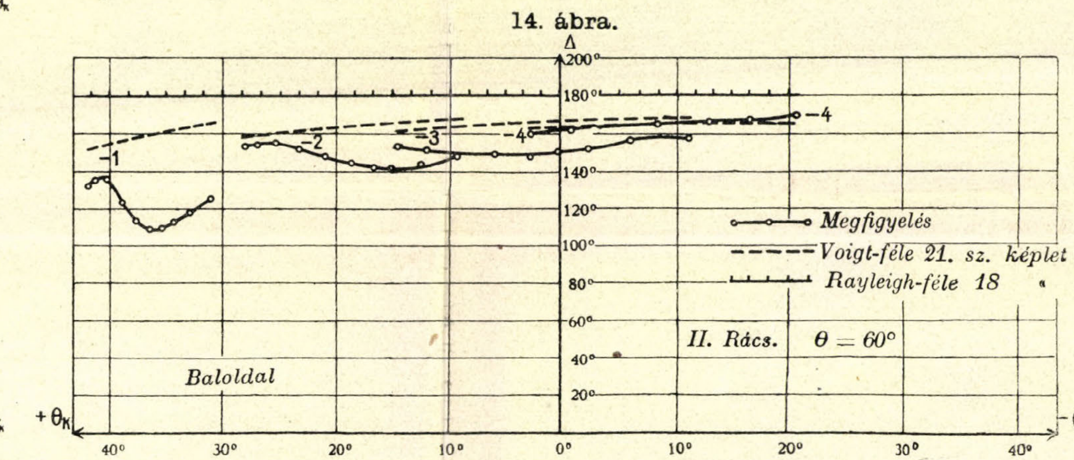
12. ábra.



13. ábra.



14. ábra.



11. táblázat.

II. Rács. $\lambda = 588\ \mu\mu$.

Θ		10°	20°	40°	40°	50°	60°	70°	80°	87°
	$\Theta +_1$	30° 30′	42° 30′	78°	—	—	—	—	—	—
	$\Theta -_1$	—	—	--	18°	25° 30′	32° 10′	37° 15′	40° 30′	41° 40′
	2ψ	102 47	100 14	85 44′	115 30′	120 2	—	92 13	87 40	79 40
jobb	Δ	168 32	158 6	109 26	162 38	128 1	—	106 49	92 38	80 38
	2ψ	115 57	119 20	88 40	82 17	84 21	—	87 20	84 20	81 52
bal	Δ	171 45	166 25	99 31	160 31	143 43	—	121 11	105 18	92 41

12. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 65°$.

$\lambda\ \mu\mu$		388	398	415	430	447	468	480	492	533	550	588	620
jobb	Δ	—	—	92°	95°	94° 21′	94° 26′	94° 10′	93°	85° 58′	84° 46′	78° 41′	74° 41′
	2ψ	—	—	125 32′	130 46′	137 16	138 6	141 22	144 44′	150 2	149 50	151 22	149 55
	Δ	92°	91° 10′	92 10	93	94 58	96 12	95 10	95 8	89 32	84 37	81 37	76 6
bal	2ψ	115 30′	122 20	126 44	132 54	136 20	138 38	141 44	145	148 18	149 50	151 6	149 57

13. táblázat.

II. Rács. $\Theta = 65°$.

$\lambda\ \mu\mu$		347	388	415	447	492	525	560	588	620	668
	Δ	85°	96° 20′	97° 2′	92° 43′	93° 31′	94° 34′	95° 57′	96° 59′	99° 28′	103° 2′
jobb	2ψ				116 1	116 42	115 54	115 58	116 5	116 35	116 25
	Δ	80 50′	92 50	95	90 22	90 18	90 55	93 21	95	97 19	—
bal	2ψ				118 22	118 50	118 10	117 12	116 43	116 11	—

megközelítéseket és elhanyagolásokat, a melyekkel az elméletnek szükségszerüen dolgoznia kell.

14. táblázat.
$\Theta = 70°. \varepsilon = 0{,}000500.$

λ	$2\psi_{-1}$	Δ_{-1}	$2\psi_{-1}$	Δ_{-1}
	bal		jobb	
668	48° 37′	135° 31′	52° 18′	125° 9′
620	52 24	136 40	60 11	117 50
580	60 4	133 20	71 32	111 44
540	70 28	129 56	85 57	108 28
500	75 40	129 48	124 22	131 20
471	87 25	149 38	113 56	169 16
447	84 36	142 13	95 15	150 52

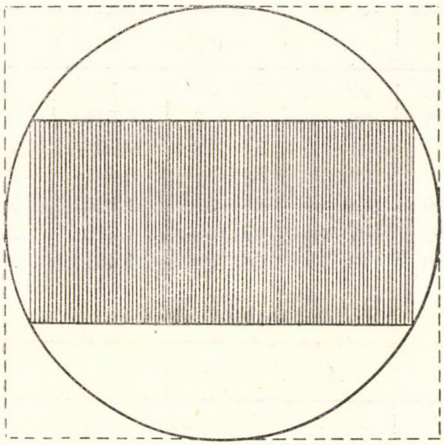
V. A rácsok anyagának optikai állandói.

Ha a mérések eredményeit az elmélettel össze akarjuk hasonlítani, ösmernünk kell a rács anyagának törésmutatóját, n-t és absorptio-cœfficiensét, $\varkappa$-t, mint a fény hullámhosszának, λ-nak, a függvényeit. Meghatároztam tehát n és $\varkappa$ értékeit az ismeretes közvetett módon; úgy t. i., hogy a tükörfémlapok nem barázdált részén directe visszavert fény ellipticitásának elemeit, Δ és 2ψ-t megmértem és ezek értékeiből n-t és $\varkappa$-t kiszámítottam.

Az általam használt Rowland-féle rácsoknál a barázdák a tükörfémből készült köralakú és csiszolt lapra oly módon vannak bemélyítve, a mint azt a következő 15. ábra mutatja.

Az említett méréseket a nem barázdált körsegmentumokon végeztem.

Az elhajlított fényben végzett mérések megkezdése előtt a rácsokat tisztítás céljából szénkénegben, majd Kayser útmutatása szerint ammoniakban és végül destillált vízben megfürösztöttem. A segmentumokon directe visszavert fényben a fürösztést megelőzően és azt követően végzett mérések igazolták, hogy ez az eljárás semminemű befolyással sem volt a rács anyagának optikai állandóira.



15. ábra.

Az állandók meghatározására úgy a csillámkompenzátort, mint a fényképező eljárást alkalmaztam.

A Δ és 2ψ értékeiből n-t és $\varkappa$-t, valamint a visszaverő képességet, J-t, százalékokban a következő DRUDE-féle[1] szigorú kifejezések alapján számítottam ki:

$$\sin\Delta \operatorname{tg} 2\psi = \operatorname{tg} Q, \quad \cos\Delta \sin 2\psi = \cos 2P, \quad \operatorname{tg} P \sin\theta \operatorname{tg}\theta = S,$$

$$\operatorname{tg} X = \frac{S^2 \sin 2Q}{S^2 \cos 2Q + \sin^2\theta}, \quad \varkappa = \operatorname{tg}\frac{X}{2}$$

és

$$n^2 = \frac{S^2 \sin 2Q}{2 \operatorname{tg}\frac{X}{2}}, \quad J = \frac{n^2(1+\varkappa^2) + 1 - 2n}{n^2(1+\varkappa^2) + 1 + 2n}. \tag{16}$$

Az eredmények a 15-ik és 16-ik táblázaton, valamint a 16-ik és 17-ik ábrában vannak feltüntetve.

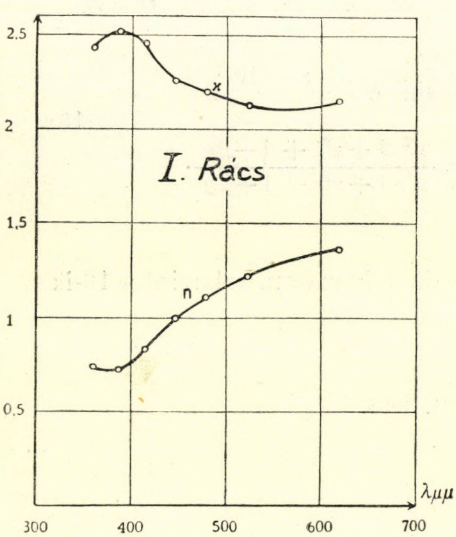
[1] P. DRUDE: Wied. Ann. 64. p. 161. 1898.

15. táblázat. I. Rács.

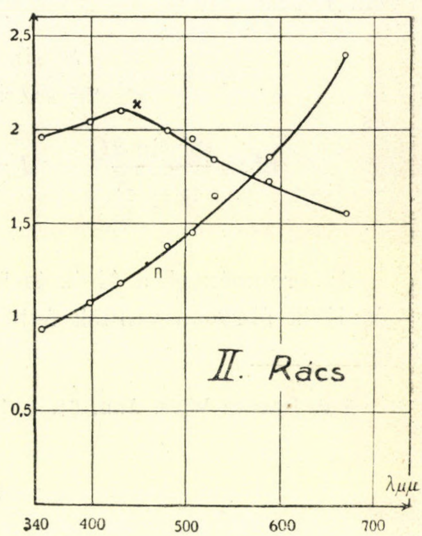
$\lambda\ \mu\mu$	Θ	$\varDelta$	$2\,\psi$	n	$\varkappa$	J %
361	63° 30′	99° 2′	71° 34′	0,736	2,430	52,7
388	63 45	99 5	72 7	0,724	2,519	
415	65	101 5	71 12	0,829	2,456	55,9
447	67	100 38	69 7	0,997	2,253	56
480	67 30	103 30	68 30	1,106	2,201	57,3
525	67 30	107 34	67 58	1,218	2,13	58,2
620	67 30	113 58	68 35	1,362	2,15	61,8

16. táblázat. II. Rács.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ	$\varDelta$	$2\,\psi$	n	$\varkappa$	J %
347	70°	79° 56′	67° 35′	0,934	1,962	47,3
398	70	90 2	66 57	1,083	2,045	52,9
430	70	96 27	67 7	1,184	2,104	56,8
480	70	102 30	65 53	1,376	1,989	58,2
508	70	104 53	65 34	1,453	1,954	58,6
533	70	110 20	64 29	1,652	1,841	59,4
533	65	124 48	67 32			
588	70	114 4	63 51	1,855	1,732	59,8
588	65	128 52	66 52			
668	70	117 50	63 31	2,406	1.555	62,1
668	65	141 57	67 26			



16. ábra.



17. ábra.

VI. Az elméletnek a megfigyelésekkel való egybevetése.

Méréseim, melyeknél a beeső lineárisan polározott fény polárossági síkja a beesés síkjával 45°-os szöget zárt be, az elhajlított fény ellipticitásának adatait, Δ és 2ψ-t, szolgáltatták. A méréseknek az elmélettel való összehasonlítása érdekében ennélfogva az elméletnek azokból a képleteiből, melyek a komplex amplitudókat állítják elő, le kellett vezetnem azokat a kifejezéseket, melyek Δ-t és 2ψ-t előállítják.

Legyen adva két egymásra merőleges, lineáris, rezgési összetévő, melyeknek komplex amplitudói $B = M+iN$ és $A = P+iQ$, akkor, — mint tudjuk —,

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{QM-NP}{PM+NQ}$$

és (17)

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{P^2+Q^2}{M^2+N^2},$$

a hol is ψ-t a B rezgés síkjától számítjuk.

Sajnos, hogy akadályokba ütközünk, amikor az elméletet a másodfokig bezáróan szigorú képletek alapján akarjuk elbirálni. A rács profilját előállító Fourier-sor coefficiensei ugyanis ismeretlenek és közvetetlen meghatározásuk a használt rácsok állandóinak kicsinysége miatt lehetetlen. Ha azonban elsőfokú kifejezésekre szorítkozunk, vagyis ha a $(\sum_k)$-kat töröljük, akkor az $\mathfrak{R}'_k$ és $\mathfrak{R}_k$ kifejezésében csak egy Fourier-coefficiens marad meg, t. i. ζ_k, sőt tg Δ, valamint $\operatorname{tg}^2 \psi$ kifejezéséből ez a coefficiens is kiesik. A mi természetesen egyképen áll úgy a Voigt-féle mint a Rayleigh-féle kifejezésekre vonatkozóan.

Az összehasonlítást először a Rayleigh-féle elsőfokú kifejezésekkel:

$$\mathfrak{R}'_k = -2\mathfrak{E}\gamma i\mu\zeta_k$$

és

$$\mathfrak{R}_k = \frac{2\mu\mathfrak{E}}{\gamma_k} i(1-a\alpha_k)\zeta_k$$

végeztem el. Ezekből a (17) alapján lesz:

$$\operatorname{tg}\psi_k = \frac{\gamma\gamma_k}{1-aa_k} \quad \text{és} \quad \Delta_k = 180^\circ \text{ vagy } 0^\circ. \tag{18}$$

Merőleges beesésnél

$$\operatorname{tg}\psi_k = \gamma_k = \cos\theta_k. \tag{19}$$

Az ezeknek a kifejezéseknek segélyével kiszámított görbék a 3—14. ábrákban ⊥⊥⊥⊥⊥⊥ vonallal vannak rajzolva.

Az ábrákból kitünik, hogy a fáziskülönbségek megfigyelt görbéje távolról sem hasonlít az elméleti vízszintes egyeneshez, míg a 2ψ-re vonatkozó görbék legalább nagyjából hasonlítanak egymáshoz. Ezt a hasonlóságot azonban zavarja az a körülmény, hogy a számított 2ψ-k csak a beesés és elhajlás szögétől függenek, ellenben függetlenek a színkép rendszámától és a fény hullámhosszától. Ennek következtében azok a görbék, melyek a 2ψ és θ_k között az elméleti összefüggést a különböző színképekben feltüntetik, összeesnek, illetve egyetlen folytonos görbét alkotnak. Adott beesési szög mellett azonban és ha a beeső fény fehér, θ_k egyazon értékénél is több különböző rendszámú és színű színkép lép fel. Mindezeknek a színképeknek a Rayleigh-féle elsőfokú kifejezések szerint 2ψ-nek ugyanazon értékével kellene birniok. Egy pillantás a 3—14. ábrákra meggyőz bennünket arról, hogy ez a valóságban nem így van.

A Rayleigh-féle kifejezések segélyével azonban még egy lépést haladhatunk, ha vele együtt felteszszük, hogy a rács symmetrikus, vagyis $\zeta_k = \zeta_{-k} = \frac{1}{2}c_k$ és hogy az (1) alatt adott sor összes Fourier-coefficiensei, c_1 és c_2 kivételével, elenyésző kicsinyek, a rács profilja tehát lényegében a

$$\zeta = c_1 \cos px + c_2 \cos 2px \tag{19a}$$

kifejezéssel előállítható. Ez esetben másodfokú tagokat is vehetünk figyelembe a nélkül, hogy szükségünk volna c_1 és c_2 értékének ismeretére. Ekkor ugyanis a harmad- és negyedrendű színképekre vonatkozó másodfokú képletekből c_1 és c_2 kiesik. Tagadhatatlan azonban, hogy RAYLEIGH-nek ez a feltevése nagyon sok esetben nem fedi a valóságot; a miről különben meg is győződtem, a mikor néhány nagyon egyszerű barázda profiljának coefficienseit más czélból kiszámítottam. Mindazonáltal talán nem lesz híjjával az érdekességnek, ha nézzük, mint alakulnak 2ψ értékei akkor, a mikor másodfokú tagokat is figyelembe veszünk.

A vonatkozó számításokat először is merőleges beesés mellett végeztem a harmad- és negyedrendű színképekre vonatkozóan, melyeknek amplitudói (19a) figyelembevételével:

$$\mathfrak{R}'_3 = \tfrac{1}{2}\mu^2 c_1 c_2 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2),$$

$$\mathfrak{R}'_4 = \tfrac{1}{2}\mu^2 c_2^2 \cos\theta_2$$

és

$$\mathfrak{R}_3 = -\frac{\mu^2 c_1 c_2 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)}{2\cos\theta_3}\left\{1 - \frac{2p^2}{\mu^2\cos\theta_1\cos\theta_2}\right\},$$

$$\mathfrak{R}_4 = -\frac{c_2^2}{2\cos\theta_2\cos\theta_4}\{\mu^2\cos^2\theta_2 - 4p^2\}.$$

Ezekből a kifejezésekből azután elég egyszerű képleteket kapunk $\operatorname{tg}\psi_k$-ra vonatkozóan, ugyanis

$$\operatorname{tg}\psi_3 = \frac{\cos\theta_2}{1 - \dfrac{2p^2}{\mu^2\cos\theta_1\cos\theta_2}}$$

és (20)

$$\operatorname{tg}\psi_4 = \frac{\cos^2\theta_2\cdot\cos\theta_4}{\left(\cos^2\theta_2 - 4\dfrac{p^2}{\mu^2}\right)}.$$

Már most $\dfrac{p}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon}$; ezekben a képletekben tehát a fénysugár útjára vonatkozó geometriai adatok mellett a hullámhossz explicite szerepel. A különböző színképekre vonatkozó képletek ezenfelül szerkezetileg is különbözők. A 7. ábrában . . . . . . vannak rajzolva 2ψ-nek ezekből a képletekből kiszámított értékei. Látnivaló, hogy 2ψ ily módon kiszámított értékei a megfigyelt értékekhez közelebb jutnak, mint az elsőfokú görbék. Azonfelül egy és ugyanazon elhajlási szögnél bizonyos, bár nagyon csekély különbség is mutatkozik a különböző színképekre vonatkozó ordináták között és ezen különbségek előjele is megegyezik a megfigyelt értékek különbségének az előjelével. Δ_3 és Δ_4-re vonatkozóan azonban ezek a másodfokú képletek nem mondanak újat.

Mindezeket a körülményeket tekintetbe véve, megállapithatjuk, hogy a Rayleigh-féle képleteknek a tapasztalattal való összehasonlítása nem vezetett kielégítő eredményre.

Több kutató mérései már most igazolják, hogy a hosszú hullámú hősugaraknál, — úgy mint több más fémét és ötvényét, — a tükörfém reflektáló képességét is tökéletesnek ($J = 100\%$) vehetjük ugyan, hogy azonban a látható és ultraviolett sugaraknál a tükörfém reflectáló képessége 100%-nál jóval kisebb. Ezt igazolják az általam használt rácsok anyagának reflectáló képességei is, melyek értékeit az optikai állandókból számítottam ki és melyek a következő táblázatban vannak összeállítva:

λ $\mu\mu$	361	388	415	447	480	525	620	
J % az I. rácsnál	52,7		55,9	56	57,3	58,2	61,8	

λ $\mu\mu$	347	398	430	480	508	533	588	668
J % a II. rácsnál	47,3	52,9	56,8	58,2	58,6	59,4	59,8	62,1

Látnivaló ezek szerint, hogy oly hullámhosszaknál, a milyeneknél méréseimet végeztem és melyek $\varepsilon = 0{\cdot}001761$ mm állandóval biró rácsnál az elhajlítás szempontjából tekintetbe jönnek, a reflectáló képesség épen nem tökéletes. Remélni lehetett ennélfogva, hogy az elmélet és a mérések között a viszony javulni fog, ha ettől, az elméletre nézve ugyan nagyfontosságú, de a valósággal nem egyező föltevéstől az elmélet megszabadul. Ez indította Voigt-ot a Rayleigh-féle elmélet általánosítására. Az elhajlított és a directe visszavert fény amplitudóira vonatkozóan általa adott kifejezések a (10) és (12) számú képletekben találhatók. Ha itt is elsőfokú kifejezésekre szoritkozunk és bevezetjük a következő rövidítéseket:

$$A_k = n^2\gamma\gamma_k(1-\varkappa^2) + n(\gamma+\gamma_k) + 1$$

és

$$B_k = n\varkappa(2n\gamma\gamma_k+\gamma+\gamma_k),$$

akkor lesz:

$$\frac{\Re_k'}{\Re_k} = -\frac{1}{2(1-a\alpha_k)}\cdot\frac{A_k^2+B_k^2}{(n+\gamma_k)^2+n^2\varkappa^2}$$
$$\cdot\frac{n\varkappa(\gamma+\gamma_k) + i\,[n^2\varkappa^2+(n-\gamma)(n+\gamma_k)]}{A_kn^2\varkappa-\frac{1}{2}B_kn^2(1-\varkappa^2)+i\left(\frac{1}{2}A_kn^2(1-\varkappa^2)+n^2\varkappa B_k\right)},$$

tehát (17) alapján:

$$\operatorname{tg}\Delta_k = \frac{\left(A_k\varkappa-\frac{1}{2}B_k(1-\varkappa^2)\right)[n^2\varkappa^2+(n-\gamma)(n+\gamma_k)]}{\left(A_k\varkappa-\frac{1}{2}B_k(1-\varkappa^2)\right)n\varkappa(\gamma+\gamma_k)}$$
$$\frac{-\left(\frac{1}{2}A_k(1-\varkappa^2)+\varkappa B_k\right)n\varkappa(\gamma+\gamma_k)}{+\left(\frac{1}{2}A_k(1-\varkappa^2)+\varkappa B_k\right)[n^2\varkappa^2+(n-\gamma)(n+\gamma_k)]} = \frac{QM-PN}{PM+QN} \tag{21}$$

és

$$\operatorname{tg}^2\psi_k = \frac{1}{4(1-a\alpha_k)^2}\cdot\frac{(A_k^2+B_k^2)^2}{\left((n+\gamma_k)^2+n^2\varkappa^2\right)^2}\cdot\frac{P^2+Q^2}{M^2+N^2}, \tag{22}$$

ahol

$$P = n\varkappa(\gamma+\gamma_k),\quad Q = n^2\varkappa^2+(n-\gamma)(n+\gamma_k),$$
$$M = A_kn^2\varkappa-\tfrac{1}{2}B_kn^2(1-\varkappa^2), \tag{23}$$

és végül

$$N = \tfrac{1}{2}A_kn^2(1-\varkappa^2)+n^2\varkappa B_k.$$

Ezek a képletek csak a rács anyagának optikai állandóit és a sugár útjára vonatkozó geometriai adatokat tartalmazzák és teljesen függetlenek a rács profiljának egyéni alakjától. Ennek következtében alkalmasak is arra, hogy az összes ugyanazon anyagból készült, még dissymmetrikus rácsoknak viselkedését is első megközelítésben feltüntessék. A profil egyéni alakjának befolyását a másodfokú tagok tartalmazzák.

Δ_k-nak és $2\psi_k$-nek a két rácsra vonatkozóan a (21) és (22) számú képletek szerint kiszámitott értékeit a 17—22. számú táblázatok tartalmazzák.

17. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 0^\circ$. Kiszámitott értékek.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_2	Δ_2	$2\ \psi_2$	Θ_3	Δ_3	$2\ \psi_3$	Θ_4	Δ_4	$2\ \psi_4$
361	24° 15′	186°	98°	38°	181° 15′	94° 30′	55°	170° 40′	87°
430	—	—	—	—	—	—	77 30′	145 20	63
447	30 30	182	91 34′	49 33′	174	82 40	—	—	—
525	36 30	180 32′	86 40	63 30	164 50	68 20	—	—	—
620	45	175 40	80	—	—	—	—	—	—

18. táblázat.

I. Rács. $\Theta = 65^\circ$. Kiszámitott értékek.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\ \psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\ \psi_{-2}$	Θ_{-3}	Δ_{-3}	$2\ \psi_{-3}$
361	44° 30′	143°	120°	29° 45′	150°	102° 32′	16° 51′	153° 20′	88° 20′
447	40 40	149	107 50′	23 30	154 38′	88 40	8 16	156 48	72 40
525	37 30	153 30′	100 4	18	157 50	79 20	—	—	—
620	33 35	156	94 30	11 42	160	70 40	—	—	—

19. táblázat.

II. Rács. $\Theta = 0$. Kiszámitott értékek.

$\lambda\ \mu\mu$	Θ_2	Δ_2	$2\ \psi_2$	Θ_3	Δ_3	$2\ \psi_3$	Θ_4	Δ_4	$2\ \psi_4$
347	23° 12′	186° 55′	96°	36° 10′	183° 15′	93° 30′	52° 10′	175°	85° 40′
398	26 54	183 45	—	—	—	—	65	168 10′	67 30
430	29 15	181 47	90 22′	47	175 14	82	77 30	147 45	55 20
533	37 15	178 36	85 10	65 20	164	62 20	—	—	—

20. táblázat.

II. Rács. $\Theta = 60°$. Kiszámitott értékek.

λ $\mu\mu$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\psi_{-2}$	λ $\mu\mu$	Θ_{-3}	Δ_{-3}	$2\psi_{-3}$	Θ_{-4}	Δ_{-4}	$2\psi_{-4}$
347	42°00′	152°	116°40′	28°15′	158°42′	103°30′	361	14°40′	162°	87°20′	2°40′	162°40′	76°20′
430	38 30	156 45′	104	22 15	161 35	88 20	430	7 40	163	75 30	– 6 22	163	64
533	33 30	162 20	95 30	15 00	165 00	78 00	533	– 2 30	166 40′	64	–20	164 40	50 40
620	30 50	164 45	91 20	9 20	167 25	71 20	620	–11	167 20	56	—	—	—

21. táblázat.

II. Rács. $\Theta = 30°$. Kiszámitott értékek.

λ $\mu\mu$	Θ_1	Δ_1	$2\psi_1$	Θ_2	Δ_2	$2\psi_2$	Θ_{-1}	Δ_{-1}	$2\psi_{-1}$	Θ_{-2}	Δ_{-2}	$2\psi_{-2}$
347	44°	—	108°30′	63°20′	163°	108°15′	17°40′	181°45′	100°40′	6°8′	183°	95°30′
430	—	—	—	81 30	135	80 20	—	—	—	—	—	—
533	53 25′	—	96	—	—	—	—	—	—	–6 5	181	94
620	—	—	—	—	—	—	8 30	179 30	99	—	—	—
668	61 30	—	88	—	—	—	—	—	—	—	—	—

22. táblázat.

II. Rács. $\lambda = 588$ $\mu\mu$. Kiszámitott értékek.

Θ	10°	20°	40°	40°	50°	60°	70°	80°	87°
Θ_{+1}	30°30′	42°30′	78°						
Θ_{-1}				18°	25°30′	32°10′	37°15′	40°30′	41°40′
2ψ	89	91 34	85 30′	90 30′	91	91 56	88 50	82 40	69
Δ	183	177	146	176 30	171	164	155	140	123

Ezek az értékek, mint θ_k függvényei a 3—14. ábrákban— — — vonallal vannak rajzolva.

Az ábrákból látjuk, hogy az ily módon kiszámított görbék nagyon egyszerű alakúak és nélkülözik a megfigyelések alapján rajzolt görbék különböző kacskaringóit. A kiszámított görbék egy főtémát képviselnek, a mely főtéma a sugár útjának geometriai sajátosságai és a rácsanyag optikai állandói által van megadva és a melyet a rács egyéni profilja a legkülönbözőbb változatokká dolgoz föl. Összehasonlítva ezeket a görbéket a RAYLEIGH-féle képletek alapján kiszámított görbékkel, látjuk, hogy ezek lényegesen közelebb jutnak a megfigyelésekhez, mint a RAYLEIGH-félék.

A megfigyelés és a számítás alapján nyert görbék között különböző helyeken különböző a megegyezés. Ennek első sorban az az oka, hogy a rács profilja, a megfigyelésekből következtetve, nem symmetrikus. Ez a körülmény azonban módot nyujt annak a megitélésére, hogy általában mily mértékű megegyezés várható a $2\psi_k$ és Δ_k elsőfokú képletei és a megfigyelés között? Az elsőfokú képletekben ugyanis nem szerepel a rács egyéni profiljára vonatkozó mennyiség, a miért is ezek Δ_k-nak és $2\psi_k$-nak a rács mindkét oldalára vonatkozóan ugyanazon értékét szolgáltatják. A rács profiljának dissymmetriája következtében azonban a megfigyelések a rács két oldalán Δ_k-nak és $2\psi_k$-nak különböző értékeit adják. Az elméleti érték pedig legfeljebb csak az egyikkel egyezhet; a miért is mondhatjuk, hogy a rács két oldalán megfigyelt értékek különbsége körülbelül mértéke annak a különbségnek, mely a megfigyelt és a kiszámított érték között várható. A profil dissymmetriája főleg az első és másodrendű színképekben mutatkozik, a minek következtében az elmélet és a megfigyelés között fellépő különbség is különösen $2\psi_k$-nál itt a legnagyobb. Magasabb rendben a megegyezés javul.

A rács profiljának befolyására vezethetők vissza az 1. és 2. rendű színképeknél megfigyelt görbékben fellépő különös kacskaringók is, melyek a kiszámított görbékben hiányzanak.

Ha például valamely elsőrendő színkép megfigyelt görbéjében bizonyos hullámhossznál valamely különösen jellemző görbület, pl. egy kifejezett minimum lép fel, úgy ez a minimum ismétlődik az ugyanazon beesési szög mellett megfigyelt összes többi színkép görbéiben is, még pedig igen megközelítően ugyanannál a hullámhossznál. A színkép rendszámának növekedésével azonban ez a jelenség ellaposodik. Különösen feltünő ez a II. rácson $\theta = 60°$-nál megfigyelt fáziskülönbségek görbéinél. Ezeknek a rendellenes görbületeknek többsége a kisebb hullámhosszaknál található, $\lambda = 400$ $\mu\mu$ táján. Ugyanezen a tájon, $\lambda = 430$ $\mu\mu$ körül, jelentkezik az általam megfigyelt hullámhosszakra vonatkozóan $\varkappa$ relatív maximuma is. Nem tartom kizártnak a két jelenség között való összefüggést; már csak azért sem, mert pl. a minimumnak egy és ugyanazon hullámhossznál való ismételt jelentkezése nyilvánvalóan rámutat a hullámhossz lényeges szerepére. A megegyezés általában jobb $2\psi_k$-nál, mint Δ_k-nál, sőt hellyel-közzel egészen kielégítő; Δ_k-nál a megegyezés az elhajlási szög növekedésével rosszabbodik.

Mindazonáltal VOIGT képletei épen Δ_k értékeinél javították meg RAYLEIGH képleteivel szemben az elmélet és a megfigyelés egyezését.

A barázdált felület által directe reflektált fényben végzett megfigyeléseimet a rács profiljának ismeretlen volta miatt nem hasonlíthattam össze az elmélettel quantitative, mert az amplitudók elsőfokú kifejezései megegyeznek a fémreflexio közönséges képleteivel, a másodfokú kifejezések pedig feltételezik a profil FOURIER-coefficienseinek ismeretét. Néhány qualitativ törvényszerűség mindazonáltal kiolvasható a másodfokú képletekből.

A profil FOURIER-coefficiensei ugyanis csak a következő:

$$\zeta_k\zeta_{-k} = \tfrac{1}{4}(c_k^2 + s_k^2)$$

csoportosításban fordulnak elő a rács által directe visszavert fény amplitudóinak kifejezéseiben. Ha most változatlan coordinata-rendszer mellett a rácsot síkjában 180°-kal elforgatjuk, úgy az $s_k - k$ megváltoztatják előjeleiket. Az elhajlitott fény amplitudóira vonatkozó másodfokú kifejezések értéke ezáltal megváltozik, a directe visszavert fény amplitudóira vonatkozó másodfokú kifejezések értéke azonban változatlan marad, mert bennük csak s_k^2 szerepel. Vagyis a dissymmetrikus rács «két különböző oldaláról» directe visszavert fény, kell, hogy úgy polározási állapotában, mint intensitásában, a rács barázdáira vonatkoztatva, symmetrikus legyen.

Egy dissymmetrikus reflexiós rács által directe visszavert fény intensitását Fröhlich[1] mérte meg a rács két oldalán egy kimeritő kisérleti vizsgálat keretében, mely főleg az ez által a rács által elhajlitott fény intensitásának a mérésére terjedt ki. A méréseket Fröhlich natriumfényben és különböző beesési szögek mellett végezte. Ezeknek a méréseknek tanusága szerint a rács két oldaláról directe visszavert fény intensitása, az elmélet követelményeinek megfelelően, tényleg igen nagy mértékben egyenlő.

A directe visszavert fény polározási állapotára vonatkozóan magam is végeztem méréseket a rácsok mindkét oldalán. A méréseket mindkét rácson $\theta = 65^\circ$-nál és az összes rendelkezésemre álló hullámhosszaknál végeztem. A 2. és 3. táblázat mutatja, hogy az elmélet által a polározási állapotnál követelt symmetria a valóságban is tényleg fennforog.

VII. Az elhajlított fény amplitudóit előállító másodfokú kifejezések alkalmazása R. W. Wood és A. Trowbridge idevonatkozó kísérleteinek számítással való követésére.

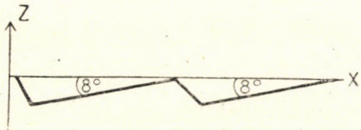
Arra, hogy némely fémrács az elhajlitott fény intensitásának az eloszlására vonatkozóan dissymmetrikusan viselkedik, egy nagyobb vizsgálat keretében már Fröhlich[2] mutatott reá.

---

[1] I. Fröhlich: Wied. Ann. 15. p. 587. 1882.

[2] I. Fröhlich: Wied. Ann. 15. p. 587. 1882.

Újabban R. W. Wood és A. Trowbridge[1] foglalkoztak az intensitás eloszlásának problemájával a rács profiljától való függésében és szellemes eljárásukkal igen jó eredményeket értek el. Oly egyenes vonalakból álló profillal biró rácsokat készítettek, melyek a beeső energia nagy százalékát egyetlen színképben központosítják. Rácsaik nagy (0·012—0·026 mm) állandóval birnak és ez tette lehetővé előre megállapított profilok készítését, illetve a kész profilok alakjának pontos meghatározását. A rács barázdáit karborundkristály segélyével puha fémötvözetből készült lapra karczolták, melyet megelőzően vékony aranyréteggel vontak be. A kristály barázdáló élénél a lapszög körülbelül 120° volt.



18. ábra.

Az ily módon készült és jól sikerült rácsok felülete csupa sík lapból áll, úgy hogy profiljuk a 18. ábrában példának rajzolt alakkal bir. A barázdát alkotó sík lapok által bezárt szög azonban általában 120°-nál néhány fokkal nagyobb. Ily rácsok természetesen csak a hősugarakat hajlítják el, mint a melyeknek hullámhossza a rács állandójával commensurabilis; a látható fénnyel szemben az egyes lapok sík tükrök gyanánt viselkednek, mert szélességük a látható fény hullámhosszánál többszörösen nagyobb.

Wood és Trowbridge több ily rácsot készítettek, melyeken az intensitás eloszlását $\lambda = 0{\cdot}0043$ mm és $\lambda = 0{\cdot}0086$ mm-nél vizsgálták. Az energiát legjobban concentráló képességgel az általuk vizsgált 8. számú rács birt, a mely általában egyike volt a legjobban sikerült példányoknak. Ennek a rácsnak a profilja a 18. ábrában van feltüntetve. A barázdák a rács egész

[1] R. W. Wood és A. Trowbridge: Physik. Zeitschrift. 11. p. 1161. 1910.

«síkját» befödik, úgyannyira, hogy az eredeti sík lapból semmi sem maradt meg. Az intensitás eloszlására vonatkozó méréseiket a TROWBRIDGE által épített vacuumspectrometeren végezték, melynél a kollimator és a megfigyelő távcső állása fix és az egyes színképek a rácsnak a spectrometer tengelye körül való forgatása révén jutnak a bolometer szalagjára s ennek folytán különböző beesési szögeknél figyeltetnek meg. Az egy hullámhossznál ily módon megfigyelt intensitások summáját tekintette WOOD az intensitás összegének (100%) és ennek százalékaiban fejezi ki az egyes intensitásokat. Világos, hogy ezeket az adatokat nem lehet az elmélet útján kiszámított intensitásokkal közvetetlenül összehasonlítani, mert az elmélet a beeső energia százalékában fejezi ki magát, adatai tehát szükségképpen változatlan beesési szögekre vonatkoznak. A kísérlet és elmélet egybevetésénél már ebből az okból is csak a különböző intensitások viszonyainak a kiszámítására szorítkozom.

WOOD megfigyelései szerint $\lambda = 0{\cdot}0043$ mm-nél a baloldali elsőrendű színkép intensitása 70%, a jobboldalié 8%. Tehát

$$\frac{I_b}{I_j} = 8,\ 7.$$

Továbbá $\lambda = 0{\cdot}0086$ mm-nél a directe visszavert kép intensitása $I_d = 66\%$, a baloldali elsőrendű színképé $I_b = 33\%$. Tehát

$$\frac{I_d}{I_b} = 2.$$

Az elméleti számítások szerint, melyeket másutt[1] részletesen közöltem, az első esetben

$$\frac{I_b}{I_j} = 9,\ 7$$

a második esetben pedig

$$\frac{I_d}{I_b} = \frac{68{\cdot}6\,\%}{27\,\%} = 2,\ 5.$$

[1] B. POGÁNY: Physik. Zeitschrift. 12. p. 279. 1911. és részletesebben göttingeni dissertatiómban.

Látnivaló tehát, hogy a másodrendű képletek az energia koncentratioiról nagyon szépen beszámolnak. Végleges véleményt azonban ebben a kérdésben csakis nagyobb kisérleti anyag feldolgozása után lehetne mondani.

VIII. Az amplitudók másodfokú kifejezéseinek felhasználása Δ és 2ψ kiszámítására.

A megfigyeléseknek az elsőfokú képletekkel való egybevetése megmutatta, hogy ezek a képletek a tapasztalt jelenségek általános jellegéről, különösen 2ψ értékeinél, eléggé beszámolnak. Egyidejüen azonban különböző eltéréseket is megállapithattunk. Tekintve, hogy ezek az eltérések a rácsok egyéni sajátosságait alkotják, közelfekvő a feltevés, hogy a rács egyéni profilja hozza őket létre. Ez a profil azonban ismeretlen lévén, a megfigyelések és az elmélet közvetetlen egybevetése nem sikerül. Az ellenkező utat sem követhetjük, hogy t. i. a rács profilját, vagyis a Fourier-coefficienseket a kisérletekből határozzuk meg. Egyrészt ugyanis nagy nehézségekkel jár a határfeltételekből nyert egyenleteknek a Fourier-coefficiensek szerint való megoldása, másrészt az ily módon létrehozott megegyezés nem volna minősithető az elmélet és kisérlet egybevetésének. Tehát tapogatódzásokra vagyunk utalva abban az irányban, vajjon Δ-nak és 2ψ-nek a rács profiljának bizonyos feltett alakja mellett a másodfokú kifejezések alapján kiszámitott értékei, összehasonlítva az elsőfokú képletek útján kiszámitott értékekkel, nem mutatnak-e ugyanolyan eltéréseket, mint a minőket maguk a megfigyelt értékek szolgáltatnak?

Nem szabad azonban szem elől tévesztenünk, hogy a másodfokú kifejezések csak akkor használhatók, ha $\frac{\tau}{\lambda}$ elég kicsiny. A mennyiben tehát említett tapogatódzásaink nem vezetnének sikerre, úgy azt annak a körülménynek is tulajdoníthatnók, hogy $\frac{\tau}{\lambda}$ a tényleg használatban lévő rácsoknál nem eléggé kicsiny; a minek folyományaként a másodfokú kifejezések már csak azért sem képesek az említett eltéréseket megmagyarázni, mert a megfigyelésekhez használt rácsok barázdáinak mélysége következtében ezek a formulák elvesztik érvényességüket.

Ha $\frac{\tau}{\lambda}$ tényleg nem eléggé kicsiny, úgy a megfigyelések és az elmélet között főleg nagy elhajlási szögeknél és különösen Δ értékeinél lesz szembetünő az eltérés.

Mielőtt azonban ezekre az elméleti vizsgálódásokra reátérnék, egy figyelemreméltó esetet óhajtok letárgyalni, a melynek elintézése minden számítás nélkül lehetséges.

Legyen a rács profilja egyszerű sinus-görbe, vagy egyszerű sinus és egyszerű cosinus-görbének a superpositioja; tehát

$$\zeta = c_1 \cos px + s_1 \sin px$$

akkor a (12) számú képlet szerint bármely beesési szögnél, bármily hullámhosszúságú fény alkalmazása mellett és tekintet nélkül a $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ viszony értékére, csak első és másodrendű színképek keletkezhetnek. $(\sum\limits_2)$ kivételével ugyanis az összes $(\sum\limits_k)$-k zérussal egyenlők. $\mathfrak{R}'_1$ és $\mathfrak{R}_1$ értékére tehát csakis ζ_1-nek, $\mathfrak{R}'_2$ és $\mathfrak{R}_2$ értékére pedig csakis $(\sum\limits_2)$-nek van befolyása. Az összes többi $\mathfrak{R}'_k$ és $\mathfrak{R}_k$-k egyenlők zérussal.

Áttérve már most a jelzett számításokra, hogy azokat elvégezhessük, az amplitudók másodfokú kifejezéseiből le kell vezetni Δ és 2ψ-nek képleteit. A (23) számú és a következő rövidítések:

$$(\sum_k)^i = -\frac{\mu^2}{4}(\sum_k)(1-aa_h)\, c_h c_g \frac{n\varkappa g l a_h}{(n\gamma_h+1)^2+n^2\varkappa^2\gamma_h^2},$$

$$(\sum_k)^r = -\frac{\mu^2}{4}(\sum_k)(1-aa_h$$

$$\cdot\, c_h c_g \frac{(1+\varkappa^2)\, n^2\gamma_h(\gamma_h^2 - g l a_h) + n(2\gamma_h^2 - g l a_h) + \gamma_h}{(n\gamma_h+1)^2+n^2\varkappa^2\gamma_h^2} \qquad (24)$$

és

$$(\sum_k)^0 = \mu^2 (\sum_k) \gamma_h \frac{c_h c_g}{2}$$

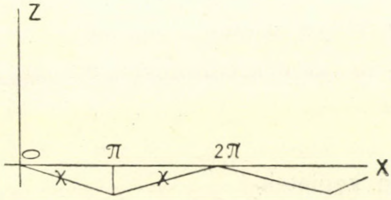
felhasználásával lesz:

$$\left.\begin{aligned} M' &= 2N\,(\sum_k)^r + 2M\left\{(1-aa_k)\frac{\mu c_k}{2} + (\sum_k)^i\right\}, \\ N' &= -\,2M\,(\sum_k)^r + 2N\left\{(1-aa_k)\frac{\mu c_k}{2} + (\sum_k)^i\right\}, \\ P' &= -\,Q\,(\sum_k)^0 + \mu c_k P, \\ Q' &= P\,(\sum_k)^0 + \mu c_k Q. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Ily módon $\operatorname{tg}^2 \psi_k$ és $\operatorname{tg} \Delta_k$-ra a (21) és (22) számú képleteket nyerjük azzal az eltéréssel, hogy bennük M', N', P' és Q' fognak szerepelni M, N, P és Q helyett. $\operatorname{tg}^2 \psi_k$, valamint $\operatorname{tg} \Delta_k$ nulladfokú, homogén függvényei M', N', P' és Q'-nak.

Ezekkel a képletekkel először is a másodrendű színképre vonatkozó Δ_2-k és $2\psi_2$-k értékeit számítottam ki merőleges beesés mellett, mely esetben a II. rácson megfigyelt görbék az elsőfokú képletek alapján kiszámított görbékhez viszonyítva (7. és 8. ábra) elég symmetrikus és szabályos eltéréseket mutatnak.

Úgy ezeknél a számításaimnál, valamint a következőknél is a II. rács anyagának optikai állandóit használtam. Nagyon érdekes a számítások eredménye a 19. ábrán látható rácsprofilra vonatkozóan.



19. ábra.

Jelöljük a hajlásszög (19. ábra) tangensét t-vel, akkor a FOURIER-coefficiensek a következő értékekkel fognak birni:

$$c_1\mu = \frac{4t}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad c_2\mu = 0, \quad c_3\mu = \frac{4t}{9\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad c_4\mu = 0,$$

$$c_5\mu = \frac{4t}{25\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad c_6\mu = 0$$

és így tovább.

Ha tehát k páros szám, akkor $\frac{\mu c_k}{2} = 0$ és a $(\sum_k)$ összegek zérustól különböző értékkel birnak; ha ellenben k páratlan szám, akkor $\frac{\mu c_k}{2}$ értéke úgyan szintén különböző zérustól, de a $(\sum_k)$ összegek egyenlők zérussal. E mellett a profil mellett tehát tg Δ_k és tg^2 ψ_k a másodfokú tagok figyelembevételével is nulladfokú, homogén függvényei t-nek, vagyis t-től függetlenek.

Wood és Trowbridge kísérletei megmutatták, hogy az egyenes vonalú profillal biró rácsoknál azok az elhajlási irányok, melyek a barázdát alkotó sík lapokra merőlegesek, kitüntetett szerephez jutnak, a mennyiben ezeknek az irányoknak a környékén összpontosul az elhajlított energia és erről a jelenségről másodfokú képleteink elég szépen beszámoltak.

Jelen számításaink szerint a polározási állapotnál másképen áll a dolog, mert a fenntebb említett elhajlási irányok a másodfokú képletek szerint a polározási állapot szempontjából nem kitüntetett irányok. Mi ugyanis $t = \text{tg}\,\chi$-nek tetszés szerinti értéket adhatunk és ily módon a kitüntetett irányt, sőt a barázda mélységét is tetszés szerint változtathatjuk a nélkül, hogy ezáltal a Δ_k és $2\psi_k$ értéke a legcsekélyebb mértékben megváltozna. Abban az esetben különösen, a mikor k páratlan szám, M', N', P' és Q' arányosak M, N, P és Q-val és a másodfokú képletek Δ_k-nak és $2\psi_k$-nak ugyanazt az értékét szolgáltatják, mint az elsőfokú képletek.

A másodrendű színkép esetében, hol k páros szám, az értékek a következőképen alakulnak:

23. táblázat.

λ	Másodfokú képlet szerint		Elsőfokú képlet szerint	
	Δ_2	$2\psi_2$	Δ_2	$2\psi_2$
347	188°	95° 30′	186° 55′	96°
398	183 27′		183 45	
430	181 36	90 36	181 47	90 22′
533	178 35	85 32	178 36	85 10

Ugyanezeket a számításokat még a következő profilok esetében is elvégeztem:

$$z = 0 \qquad x = 0\text{-tól } x = \frac{\varepsilon}{4}\text{-ig}$$

és

$$x = \frac{3\varepsilon}{4}\text{-től } x = \varepsilon\text{-ig}$$

mind a 4 profil esetében és

$$1.\quad z = -\frac{1}{p}\sin^2 p\left(x - \frac{\varepsilon}{4}\right) x = \frac{\varepsilon}{4}\text{-től } x = \frac{3\varepsilon}{4}\text{-ig } \tau = 280\,\mu\mu$$

$$2.\quad z = -\frac{1}{3p}\sin^2 p\left(x - \frac{\varepsilon}{4}\right) \quad « \quad « \quad « \quad « \quad \tau = 93\,\mu\mu$$

$$3.\quad z = -\frac{1}{9p}\sin^2 p\left(x - \frac{\varepsilon}{4}\right) \quad « \quad « \quad « \quad « \quad \tau = 31\,\mu\mu$$

$$4.\quad z = t\left(\frac{\varepsilon}{4} - x\right) \quad « \quad « \quad x = \frac{\varepsilon}{2} \quad « \quad \tau = 275\,\mu\mu$$

és

$$z = t\left(x - \frac{3\varepsilon}{4}\right) \qquad x = \frac{\varepsilon}{2}\text{-től}$$

$$x = \frac{3\varepsilon}{4}\text{-ig, hol is } t = tg\,32°.$$

Mindezekben az esetekben a barázda szélessége egyenlő két egymásra következő barázda közének a szélességével, mely feltevésre több rácsnak a mikroszkoppal történt megvizsgálása szolgáltatott okot. Az előző példa gyaníttatja, hogy a barázda mélységének a változtatása nem lehet nagy befolyással Δ és 2ψ kiszámított értékére; mindazonáltal, — a mint ez a táblázatos összeállításból kitünik, — a választott példákban τ meglehetős nagy értékeket is vesz fel. A Fourier-sor coefficiensei a következők:

1. $c_1\mu = \frac{4}{3\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}$, $c_2\mu = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}$, $c_3\mu = \frac{4}{15\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}$,

$$c_4 = 0, \quad c_5\mu = -\frac{4}{105\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad c_6 = 0,$$

2. ugyanazok $^1/_3$-dal sokszorozva,
3. « $^1/_9$-del «
4. $c_1\mu = \frac{1,3}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}$, $c_2\mu = -\frac{0,65}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}$, $c_3\mu = \frac{0,144}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}$,

$$c_4\mu = 0, \quad c_5\mu = \frac{0,052}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

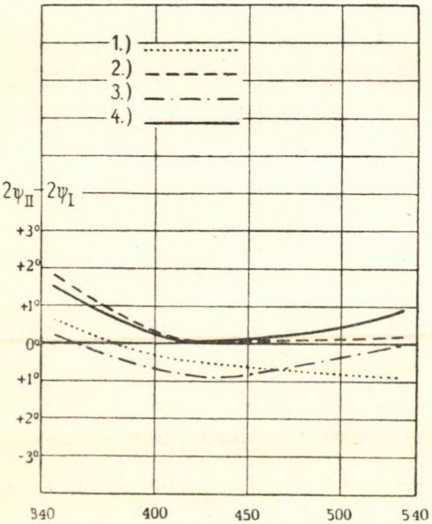
Ezeknek az értékeknek az alapján azután a (21), (22), (23), (24) és (25) számú képletek megadják Δ_2 és $2\psi_2$ értékeit. Az eredmények a következő táblázatban foglaltatnak:

24. táblázat.

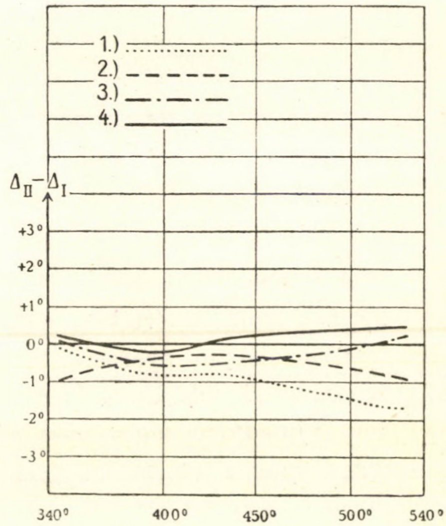
λ	$z=-\frac{1}{p}\sin^2 p\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$		$z=-\frac{1}{p3}\sin^2 p\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$		$z=-\frac{1}{p9}\sin^2 p\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$	
	Δ_2	$2\psi_2$	Δ_2	$2\psi_2$	Δ_2	$2\psi_2$
347	186° 47′	96° 36′	186°	97° 50′	186° 58′	96° 14′
398	182 56		183 23′		183 8	
430	180 59	89 50	181 26	90 22	181 18	89 30
533	176 54	84 20	177 42	85 24	178 50	85 14

λ	$z=t\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $z=t\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$		Elsőfokú képletek szerint	
	Δ_2	$2\psi_2$	Δ_2	$2\psi_2$
347	187° 7′	97° 30′	186° 55′	96°
398	183 30		183 45	
430	181 58	90 20	181 47	90 22′
533	179 4	86	178 36	85 10

A 24. táblázat első 8 oszlopának értékei a 20. és 21. ábrában vannak összehasonlítva az utolsó két oszlop értékeivel, melyek az elsőfokú képletek alapján lettek kiszámítva. A 20. és 21. ábrákban, mint ordináta $2\psi_{II}-2\psi_{I}$ illetve $\Delta_{II}-\Delta_{I}$ szerepel, vagyis: a másodfokú és elsőfokú képletek alápján számított értékek különbsége. Az egyes görbék száma megfelel a rács-profil számának.



20. ábra.



21. ábra.

A 20. és 21. ábra qualitative ugyanazokat a jelenségeket mutatják, mint a 3., 4. és 7. és különösen a 8. ábra a másodrendű színképekben: t. i. a másodrendű képletek alapján kiszámított görbék ép oly rendszertelenül ingadoznak az elsőfokú képletek alapján számított görbék körül, mint a megfigyelt görbék. Quantitative kevésbbé tökéletes a hasonlóság. A megfigyelésen alapuló görbék nagyobb eltérései valószinűvé teszik, hogy a barázdák tényleg valamivel mélyebbek, mint a mily mélyeknek azokat az elmélet felteszi.

A 3—8. ábrákon látjuk, hogy az eltérések a megfigyelés és az elsőfokú képletek alapján kiszámított görbék között különösen nagyobb elhajlási szögek, tehát $\alpha = 0$ mellett a magasabb rendű színképeknél vesznek fel nagyobb értékeket. Megkíséreltem ezt a jelenséget az elmélet alapján is magyarázni és e végből $\alpha=0$ esetében a negyedrendű színképre vonatkozóan is kiszámítottam Δ és 2ψ értékeit a másodfokú képletekkel.

A negyedrendű színképre vonatkozó számításaim eredményét a 25. táblázat adja.

25. táblázat.

1., 2. és 3. képlet szerint			Csak c_1 és c_2		Elsőfokú képlet szerint	
λ	Δ_4	$2\psi_4$	Δ_4	$2\psi_4$	Δ_4	$2\psi_4$
347	178° 58′	93° 40′	177° 45′	94° 8′	175°	85° 40′
398	172 30	78 30	172 55	79	168 10′	67 30
430	153 45	71 42	154	74 20	147 45	55 20

A táblázat második és harmadik oszlopában vannak Δ_4 és $2\psi_4$-nek azok az értékei, melyeket az 1, 2. és 3. számú rácsprofilok alapján nyerünk. Mindhárom esetben ugyanazokat az értékeket kapjuk. Ugyanis $c_4 = 0$; Δ_4 és $2\psi_4$ ennélfogva homogen, nulladfokú függvényei a Fourier-coefficienseknek, tehát függetlenek a barázda mélységétől. A 25. táblázat 4. és 5. oszlopában azok az értékek találhatók, melyek a (21—25) képletekből úgy adódnak, ha e képleteket a Rayleigh-féle (20) számú képlet mintájára megcsonkítjuk, vagyis ha feltesszük, hogy a rács profilja a (19a) alatti kifejezéssel előállítható.

A 25. táblázatban található értékek tanúsága szerint másodfokú képleteink quantitative is megmagyarázzák azokat az eltéréseket, melyek a megfigyelések és az elsőfokú képletek alapján számított értékek között a 4. rendű színképben felléptek.

Bár a Rayleigh-Voigt-féle rácselméletnek a megfigyelésekkel való quantitativ egybevetése teljes szigorral nem volt kivihető, ezeknek a vizsgálatoknak az eredményét úgy lehet talán összefoglalni, hogy az említett elmélet a szóbanforgó jelenségekkel összhangban van.

Pogány Béla.

A MOLECULARIS REFRACTIO.

A molecularis refractio régibb és újabb kifejezései mellett:

$$MR = \frac{M(n-1)}{d}, \quad \frac{M}{d}\frac{n^2-1}{n^2+2}$$

— a hol M molekulasúly, d sűrűség és n törésmutató — a melyek közül az utóbbi hosszú elektromos hullámok esetére a Clausius-Monotti kifejezésébe megy át:

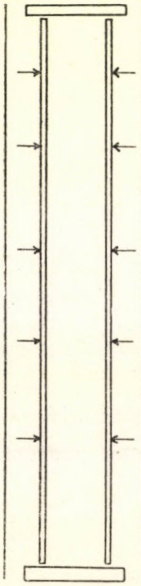
$$\frac{M}{d}\frac{D-1}{D+2},$$

a hol D a dielektromos constans, azt hiszem, bizonyos theoreticus előnynyel birna a kifejezés

$$\frac{M}{d}\frac{D-1}{D}\left(=\frac{M}{d}\frac{n^2-1}{n^2}\right),$$

a hol D az *electrostaticus mérésekből meghatározott* dielectromos constanst jelenti. A mint az először emlitett két kifejezés a temperaturával, nyomással, sőt esetleg a halmazállapotváltozással szemben is meglehetős változatlannak mutatkozott és a keveredésnél, sőt chemiai reactiónál is körülbelül additive viselkedik, hasonló fog állani a tőlük nem nagyon különböző újonnan proponált kifejezésre; az utóbbinak azonban azon előnye van, hogy változásai theoreticusan, thermodynamikailag is követhetők.

Azon elgondolt eszköz, a melyen kisérletezni fogunk, a következő: a henger, a melybe a vizsgált anyag van zárva, végtelenül lapos, egyenes körhenger; dugattyúival congruens és parallel condensator lapok közt nyugszik, a melyeknek középpontján megy át a henger tengelye.

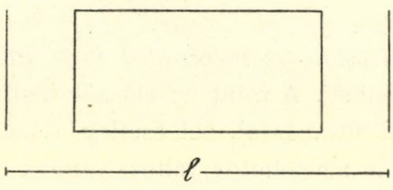


1. ábra.

A henger természetesen tökéletesen záró és nem surlódó dugattyúkkal bir, alakja és nagysága mindennemű hatás által megváltozhatatlan, dielektromos constansát tetszés szerint közel vehetem az egységhez stb. stb.

Végül olyan nagynak vehetem a henger radiusának viszonyát vastagságához, hogy a condensator-lapok kibocsátotta összes erővonalak észrevehetőleg rajta futnak keresztül és ha belőle egy 1 cm^2 alapú, vele párhuzamos alkotójú részhengert kivágva képzelek, ezen részhenger thermicus és elektromos tulajdonságai észrevehetőleg mindenütt azonosak; tehát energiaváltozásai az egész henger energiaváltozásaihoz állandó arányban állanak, t. i. $1 : F$, ha F a condensatorlap vagy a vele congruens dugattyú területe; elég tehát egy ilyen részhengert vizsgálnunk.

Ezen 1 cm^2 alapú részhengernek egyik condensatorlapján az



2. ábra.

elektromos töltés σ, a másikon $-\sigma$. A potentiálkülönbség a két lap között V.

A condensatorlapok közt levő dielectricum csak az alkotókkal parallel terjedhet ki, különböző nyomásokon és hőmérsékleteken különböző magasságú, de mindig ugyanolyan, t. i. 1 cm^2 alapú hengert képezve; ha tehát csak mindenütt egyforma hydrostaticus nyomást akarunk alkalmazni, szilárd dielectricumokat ki kell zárnunk.

Ha a dielectricum tömege M, és sűrűsége d, a condensatorlapok közti l távolságból $\frac{M}{d}$ hosszúságú darabot tölt ki.

Tehát ha a dielectricum dielectromos constansa D,

$$V = 4\pi\sigma\left(l - \frac{M}{d}\right) + 4\pi\sigma\frac{1}{D}\frac{M}{d} = 4\pi\sigma\left\{l + \frac{1-D}{D}\frac{M}{d}\right\} =$$

$$= 4\pi\sigma\left\{l - \frac{D-1}{D}\frac{M}{d}\right\}.$$

Ha a dielectricum különböző anyagok rétegeiből áll, akár érintik ezen rétegek egymást, akár nem, a potentiálkülönbség kifejezése:

$$V = 4\pi\sigma\left\{l - \sum_{(i)}\frac{D_i - 1}{D_i}\frac{M_i}{d_i}\right\}.$$

Szerkezetünknél $\sigma = P$, a hol P a normálpolarisatio (dieletric displacement); P mindenütt állandó irányú és nagyságú.

A dielectricumot képező anyaggal vagy anyagokkal mi (isotherm és reversibilis úton lejátszódó) «reactiókat» fogunk végezni; az inkább fizikális reactiókat, mint a milyen p. o. egy folyadék elpárolgása, két folyadék keveredése, egy gáz oldása stb. stb. szintén ideértve. Egy ilyen reactio (isotherm-reversibilis) tehát teljesen megvan határozva, ha ismerjük, hogy a végén

1. minden anyagból *mennyi* (azaz milyen vastag rétegben),
2. minden anyag minő *concentratióban* van jelen.

Szerkezetünk a megbeszélt módon be lévén állítva, elvégezzük az (isoth.-r.) körfolyamatot:

I. Reversibilis módon ki engedjük sülni a condensatort, a mely e közben

$$\int_0^\sigma V d\sigma = \frac{V\sigma}{2} = \frac{VP}{2} = 2\pi P^2\left\{l - \sum\frac{D_i - 1}{D_i}\frac{M_i}{d_i}\right\}$$

munkát végez; e közben vigyázunk, hogy a dielectricumot *állando concentratión* tartsuk, az electrostrictio alábbhagyása miatti esetleges térfogatváltozásokat alkalmas nyomásváltozásokkal compensálva; a dielectricum állandó térfogaton maradván ilyen módon, munkát nem végez.

II. A dielectricumban végbe engedjük menni a reactiót, reversibilis úton, a mely a dielectricumot a concentratio és anyagmegoszlási állapotból a' concentratio és anyagmegoszlási állapotba viszi, annak jeléül, hogy ez $P=0$ electrostrictio alatt történt, a munkát jelöljük így:

$$A_0.$$

III. Visszahozzuk a σ electromos tömeget, a dielectricumot a' állapotban tartva, a nyomások alkalmas változtatásával; a végzett *teljes* munka

$$\int_\sigma^0 V' d\sigma = -\frac{V'\sigma}{2} = -\frac{V'P}{2} = -2\pi P^2 \left\{ l - \sum \frac{D'_i - 1}{D'_i} \frac{M'_i}{d'_i} \right\}.$$

IV. Visszafordítjuk a reactiót; a végzett munka

$$-A_P$$

és ezzel visszaérkezünk a kezdeti állapotra, a anyag és concentratiomegoszlásra és σ felhalmozott elektromos sűrűségre.

I. és III.-ban a concentratio volt állandó és az elektromos tömeg változott, II. és IV.-ben az elektromos tömeg volt állandó és a concentratio változott; I. és III.-ban azért különbözik az elektromos munka, mert a dielectricum természete más és más, II. és IV.-ben azért különbözik a chemiai munka, mert az electrostrictio más és más.

Isotherm-reversibilis lévén a folyamat

$$\frac{V\sigma}{2} + A_0 - \frac{V'\sigma}{2} - A_P = 0$$

vagy másképen

$$(A_P - A_0) + \frac{V'\sigma}{2} = \frac{V\sigma}{2}, \quad A_P = A_0 + \frac{V\sigma}{2} - \frac{V'\sigma}{2}.$$

Qualitative ezen egyenletek azt jelentik, hogy a reactio

(= változás a-ról a'-re) nagyobb vagy kisebb munkával jár electrostrictio alatt, mint a nélkül, a szerint, hogy a reactio által csökken vagy nő az electromos energia, vagy mivel az ideális határesetben elvégzendő reversibilis munka mértéke a tényleg beálló folyamatok *aviditásának*, azt jelenti, hogy egy reactio electrostrictiós térben könnyebben jön létre, ha létrejötte által az electromos energia fogy; a munkák különbsége egyenlő az electromos energiák különbségével.

Ez nyilván így van az általános esetben is, a hol az electromos energia kifejezése

$$2\pi \iiint\limits_{(T)} P^2 dxdydz - 2\pi \iiint\limits_{(\tau)} P^2 \frac{D-1}{D} dxdydz$$

— T jelentvén az egész dielektromos teret, τ annak egyéb dielectricummal, mint vacuummal töltött részét. Azonban általános esetben a dielectricumok kiterjedése egyéb munkavégzéssel is jár, mint a mit a hydrostaticai nyomás ellen végeznek, t. i. ezen munka nagyobbodik vagy kisebbedik, a szerint, hogy ezáltal az anyag *erősebb* elektromos térből *gyöngébbe* vándorol-e, vagy megfordítva; ezen complicatiót kikerülendő, rendeztük be kissé mesterséges gépünket.

A potentiál explicit kifejezése szerint

$$\frac{A_P - A_0}{2\pi P^2} = \sum_{(i)} \frac{D_i'-1}{D_i'} \frac{M_i'}{d_i'} - \sum \frac{D_i-1}{D_i} \frac{M_i}{d_i}.$$

Ha a reactio eredménye egyetlen egy test és a moleculare-fractio törvénye (levezetett kifejezésünkkel, mint specificus refractióval) érvényes volna, a baloldalon álló kifejezésnek zérusnak kellene lennie.

A baloldalon álló kifejezés jelenti azon két maximalis munka közötti különbséget, erg = gr cm^2 sec^{-2}-ben számítva, a melyet ugyanazon reactio (t. i. ugyanazon két a és a' concentratio és összetételi állapot közti átmenet szolgáltat, ha egyszer electrostrictio nélkül és egyszer olyan electrostrictio alatt megy végbe, a mely a vacuumban 1 cm^3 térfogatban 1 erg energiát halmoz föl.

$\frac{A_P - A_0}{A_0}$ aligha lesz valaha directe mérhető, mert nagyságrendje körülbelül $\frac{\text{erg}}{\text{kis caloria}} = \frac{1}{4{\cdot}18.10^7}$.

Szokott módon megkaphatjuk a reactiót

$$\frac{dA_P}{dT} = \frac{dA_0}{dT} + 2\pi P^2 \frac{d}{dT}\left\{\sum \frac{D_i'-1}{D_i'}\frac{M_i'}{d_i'} - \sum \frac{D_i-1}{D_i}\frac{M_i}{d_i}\right\} =$$

$$= \frac{Q'}{T} = \frac{Q}{T} + 2\pi P^2 \frac{q}{T}$$

$$\frac{d}{dT}\left\{\sum \frac{D_i'-1}{D_i'}\frac{M_i'}{d_i'} - \sum \frac{D_i-1}{D_i}\frac{M_i}{d_i}\right\} = \frac{q}{T}$$

a hol tehát q a bevett terminologia szerint «a reactio reversibilis electrostrictiós latens hőjének» volna nevezendő.

Pólya György.

MEGJEGYZÉSEK AZ ELEKTROMOSSÁG ÉS MÁGNESSÉG TANÁHOZ.

(Első közlemény.)

A következőkben nehány eljárást ismertetek, melyekkel az elektromosság és mágnesség tanának egyik-másik alapvető tantételét, aránylag kevés előismeret és számítás segítségével lehet levezetni. Az eljárások előnyét különösen abban látom, hogy világosan látni belőle, mily fizikai tapasztalatok vagy föltevések felhasználásával jutunk el az illető tételekig. Ezen eljárásokat műegyetemi előadásaim alkalmával dolgoztam ki, melyekben az volt a czélom, hogy ezen alaptételeknek lehetőleg rövid és szemléletes indokolását adjam a nélkül, hogy az elméleti fizika szokásos részletesebb apparátusát felhasználjam, hogy annál gyorsabban juthassak a tételeknek gyakorlati példákra való alkalmazásához. Megjegyzéseimnek kizárólag didaktikai szempontból tulajdonítunk fontosságot és ebből a szempontból kérem az olvasó érdeklődését.

1. §. Az elektromágneses tér Maxwell-féle alapegyenleteinek levezetése.

Se szeri se száma az irodalomban az elektromágneses tér MAXWELL-féle alapegyenletei levezetésének. Hogy megint egy levezetést mutatok be, azt a fönn említett indokok igazolják; reméltem ugyanis, hogy a közlendő levezetésből világosan ki fog tűnni a MAXWELL-féle elmétet alapgondolata, *a vezetőkben folyó és a polarizácziós (eltolódás-) áramok egyenértékűsége.*

A vektorjelölést fogom használni, mely az irásmódot rendkivül megröviditi és semmi nehézséget nem okoz, hacsak jól megjegyezzük, hogy vektorok közti egyenlőség három-három menynyiség (a vektor összetevők) egyenlőségének rövid jele.[1]

A vektorokat német betűkkel irjuk; pl. $\mathfrak{E}$ lesz az elektromos térerősség (a pozitiv elektromos tömeg egységére ható erő), $\mathfrak{H}$ a mágneses térerősség (a pozitiv mágneses tömeg egységére ható erő); valamely vektornak s irányra való vetületét a vektorbetű mellé helyezett s index-szel jelöljük. Ennek megfelelően $\mathfrak{E}$ derékszögű összetevői $\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{E}_z$.

Használjuk még a következő ma már általában elfogadott jelöléseket:

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z}.$$

grad φ az a vektor, a melynek összetevői $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, a hol φ skaláris mennyiség. rot $\mathfrak{E}$ az a vektor, a melynek összetevői:

$$\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}.$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Többször fogjuk alkalmazni a következő STOKES-tól származó, közismert és egyszerű geométriai segédeszközökkel levezethető tételt:

$$\int\limits_{(s)}\mathfrak{E}_s ds = \int\limits_{(f)}(\text{rot }\mathfrak{E})_n df \tag{1}$$

a hol a baloldali integrál a zárt s görbére terjesztendő ki, melynek egy eleme ds, a jobboldali integrál pedig arra az f felületdarabra, a melyet tetszésünk szerint borítunk rá az s görbére; n jelenti a df felületelemnek normálisát, (rot $\mathfrak{E})_n$ pedig a rot $\mathfrak{E}$ vektor vetületét az n irányra.

Az elektromágneses tér MAXWELL-féle alapegyenleteinek felállításához már most a következő fizikai tételeket használjuk fel.

---

[1] L. egyébként a «Nem folytonos jelenségek az elektrodinamikában» czímű dolgozatomnak 2. §-át, e lapok XV. kötetének 345. lapján.

1. BIOT-SAVART elektromágneses törvénye.

2. A polározódás árama mágneses hatásaiban egyenértékű valamely vezetőben folyó árammal.

3. Az elektromágneses indukczió törvénye.

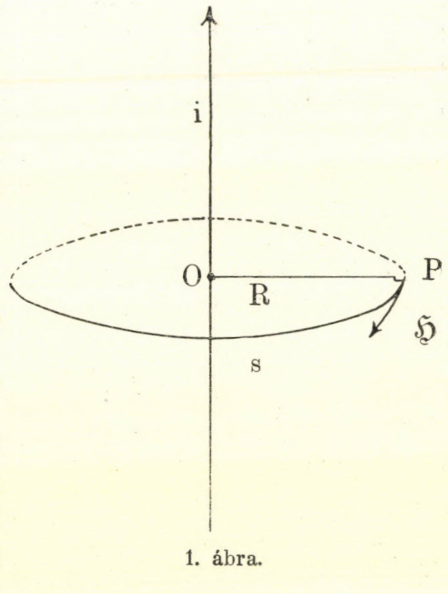
BIOT-SAVART szerint a dl áramelem, melyben i erősségű áram folyik át, oly $d\mathfrak{H}$ mágneses teret kelt a környezetének valamely P pontjában, melynek iránya merőleges a dl-en és a dl-et a P-vel összekötő r egyenesen átfektetett síkra, nagysága pedig arányos az áram erősségével, az áramelem hosszával a dl és r alkotta α szög sinus-ával és fordítva arányos az r távolság négyzetével. Tehát:

$$d\mathfrak{H} = \frac{i\,dl \sin\alpha}{cr^2} \tag{2}$$

a hol $\frac{1}{c}$-vel jelöltük az arányossági tényezőt, melynek értéke a mértékrendszer választásától függ. Véges vezeték mágneses terét a $d\mathfrak{H}$ integrácziójából kapjuk. Ismeretes pl. a végtelen hosszú egyenes vezeték mágneses tere a vezetéktől R távolságban:

$$\mathfrak{H} = \frac{2i}{cR}. \tag{3}$$

Számítsuk ki az $\int\limits_{(s)} \mathfrak{H}_s ds$ integrált, oly R sugarú körre, melynek síkja merőleges az egyenes vezetékre és melynek közép pontja ezen az egyenesen fekszik.



1. ábra.

Minthogy $\mathfrak{H}$ az R kör mentén mindig az érintő irányába esik $\mathfrak{H}_s = |\mathfrak{H}|$ és

$$\int\limits_{(s)} \mathfrak{H}_s ds = \frac{4\pi i}{c}. \tag{4}$$

Ámde STOKES tétele értelmében

$$\int_{(s)} \mathfrak{H}_s ds = \int_{(f)} (\text{rot}\, \mathfrak{H})_n df = \frac{4\pi i}{c}, \tag{5}$$

a hol a felületi integrál az R sugarú kör által bezárt területre terjesztendő ki. Eddig ez az egyenlet csakis a végtelen hosszú egyenes vezetékre az említett különös esetben érvényes, ámde bármilyen folytonos görbületű vonalszerű vezetékre alkalmazható, hacsak az R sugarat igen kicsinynek választjuk, úgy azonban, hogy a kör síkja mindig merőleges legyen a vezeték irányára; ekkor ugyanis a vezetékhez igen közel álló pontokra nézve a vezeték úgy viselkedik, mint a végtelen egyenes vezeték, távolabbi részeinek mágneses hatása ugyanis a közeli részek hatásához képest elhanyagolható. Tegyük most fel ezenkívül, hogy az áramlás nem vonalszerűen, hanem térben történik és az R sugarú kör valamely df elemén át $\mathfrak{J}df$ az áramlás erőssége, $\mathfrak{J}$ tehát az áram fajlagos erőssége, akkor mindenesetre kicsiny R-ekre nézve közelítőleg

$$\int_{(f)} (\text{rot}\, \mathfrak{H})_n df = \frac{4\pi}{c} \int_{(f)} \mathfrak{J} df, \tag{6}$$

vagyis ha a betűk fölé helyezett vonások a kis kör sugarára vonatkozó középértékek, akkor:

$$\overline{(\text{rot}\, \mathfrak{H})_n} \int_{(f)} df = \frac{4\pi}{c} \overline{\mathfrak{J}} \int_{(f)} df$$

vagy a felület nagyságával kétoldalt elosztva

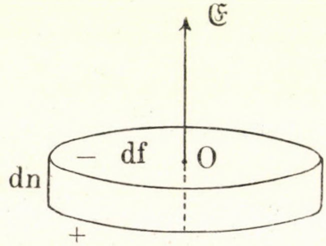
$$\overline{(\text{rot}\, \mathfrak{H})_n} = \frac{4\pi \overline{\mathfrak{J}}}{c}. \tag{7}$$

Húzzuk most annyira össze az R kört, hogy egy ponttá zsugorodjék össze, akkor a középértékek egyszerüen az O pontbeli értékekkel esnek össze s a (7) egyenlet egyúttal egész szigorúan érvényes, mert hiszen áttértünk a határra $R = 0$-ra vonatkozólag. Azonkívül a $(\mathrm{rot}\,\mathfrak{H})_n$ mellől az n indexet is elhagyhatjuk, mert hiszen az O pont körül a $\mathfrak{H}$ eloszlása olyan, mint az i körül forgó térfogatelemben a sebesség eloszlása, tehát — tekintettel a $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}$ jelentésére — a $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}$ vektor iránya az i, illetve n irányával összeesik. A tér mindazon pontjaiban, a melyekben elektromos áramlás van, érvényes lesz tehát a következő egyenlet:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{J}. \tag{8}$$

Ez mindeddig nem egyéb, mint egy tétel a vezetőkben folyó elektromos áramlások elméletéből, eddig még a FARADAY-MAXWELL-féle fizikai felfogást egyáltalában nem használtuk fel; ez most megtörténik az által, hogy a (8) egyenletet a tér ama pontjaira nézve is érvényesnek tekintjük, a melyekben kisérlettel kimutatható elektromos áramlás nincs, a szigetelő vagy dielektrikum pontjaira. FARADAY-MAXWELL szerint ugyanis az elektromos erőtér hatása alatt a szigetelők bizonyos úgynevezett polározott állapotba jutnak, azaz a positiv és negativ elektromosságok az erővonalak irányában szétválnak, minthogy azonban a szigetelő mozgásukat akadályozza, csak igen kicsiny távolságba jutnak egymástól s ezen helyzetben megmaradnak mindaddig, míg az erőtér újabb változása újabb eltolódásra nem kényszeríti őket. Elektromosság mozgása vagyis áramlás e szerint csakis az erőtérnek időbeli változásával történik. A jelenség hasonló ahhoz, mely szigetelőbe beágyazott vezető molekulákban menne végbe. Hogy a (8) egyenletet alkalmazhassuk, elegendő ezen polározódás- vagy eltolódás-áram erősségét kiszámítani, s ezt a (8)-ban $\mathfrak{J}$ helyére írni. Az eltolódás-áram erősségét pedig megkapjuk, ha előbb egy térfogatelemben szétváló elektromosság mennyiségét az $\mathfrak{E}$ erőtér függvényeként kiszámítjuk.

Válasszunk oly hengeralakú térfogatelemet, melynek df alapjai az $\mathfrak{E}$ erő irányára merőlegesek s melynek magassága dn; az $\mathfrak{E}$ erő hatására a negativ elektromosság az $\mathfrak{E}$ iránya felé néző alapra, a pozitiv elektromosság pedig a másik alapon helyezkedik el, ilyen módon lemezes sűritőt alkotva. A lemezes sűritőben azonban ismerjük az elektromosság egyensúlyának föltételeit: ha $\mathfrak{D}df$ az elektromos töltés az egyik fegyverzeten, $V_2 - V_1$



2. ábra.

a potencziálkülönbség a két fegyverzet között, akkor ha C a sürítő kapaczitása, ha egyelőre a léghíjjas térre, az éterre szorítkozunk:

$$\mathfrak{D}df = C\,(V_2 - V_1).$$

Lemezes sürítő esetében a mostani jelölésekkel:

$$C = \frac{df}{4\pi dn}$$

tehát

$$\mathfrak{D}df = \frac{df}{4\pi} \cdot \frac{V_2 - V_1}{dn} = \frac{df}{4\pi}\,\mathfrak{E},$$

azaz a felületegységre eső töltés

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi}. \tag{9}$$

($\mathfrak{D}$ is vektormennyiség, mert a felületdarab, melyre vonatkozik irányított, ugyanis az $\mathfrak{E}$ irányára merőleges. $\mathfrak{D}$ az úgynevezett dielektromos eltolódás.

$\mathfrak{D}$-ból most már az eltolódásáram felületegységre eső értéke egyszerűen idő szerinti differencziálással adódik ki, tehát

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{10}$$

s ezt (8)-ba behelyettesítve megkapjuk a MAXWELL-féle egyenletek első rendszerét a jól ismert alakban:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\cdots \tag{I.}$$

A levezetés ellen azt az ellenvetést lehet tenni, hogy a sűrítő kapaczitásának képlete, továbbá az $\mathfrak{E}$ térerősség kifejezése a potencziál grádienseként csupán egyensúlyban levő elektromosság eloszlására (elektrosztatikában) érvényes, a levezetés tehát csakis a fénysebességhez képest lassan változó (quasistationär) állapotokra érvényes; a gyakorlati esetek nagy részére e szerint eredményeink közvetlenül alkalmazhatók, általános érvényességüket pedig most már újabb hipotézis alapján föltételezhetjük, miután az (I.) egyenleteknek fizikai hátterét lassú változások esetében már megismertük.

*

A MAXWELL-féle rendszer második csoportja az indukczió törvényének kifejezése, melyet a következő, a gyakorlatban is közvetlenül alkalmazható alakban mondunk ki: *Zárt vezetékben indukált elektromindító erő a vezetéken átmenő mágneses erőáramlás (fluxus) időbeli megváltozásának sebességével arányos.*

Mágneses erőáramlás alatt a vezetéken átvonuló erővonalak összes száma értendő, ha az erővonalakat úgy rajzoljuk, hogy a $\mathfrak{H}$ mágneses tér irányára merőlegesen elhelyezett 1 cm^2-nyi felületen épen $\mathfrak{H}$ erővonal menjen keresztül.

Az említett alaptételt most már így fogalmazhatjuk: minthogy az elektromindító erő az a munka, a melyet az elektromos erők végeznek az alatt, hogy a pozitiv elektromos tömeg egységét zárt vezetékben egyszer teljesen körülvisszük, az elektromindító erőt a munka közönséges definiczió alapján az

$$\int_{(s)} \mathfrak{E}_s\, ds$$

integrállal állíthatjuk elő, a mely az egész zárt vezetékre kiterjesztendő.

Az indukczió alaptétele tehát a következő lesz:

$$\int_{(s)} \mathfrak{E}_s \, ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{(f)} \mathfrak{H} df \tag{11}$$

Az $\frac{1}{c}$ arányossági tényező tapasztalat szerint ugyanaz, mint a mely a Biot-Savart törvényben föllép, a negativ előjel pedig Lenz törvénye értelmében szükséges.

Legyen n a tér valamely O pontjában a rot $\mathfrak{E}$ iránya, és alkalmazzuk a (11) egyenletet oly R sugarú körre, melynek középpontja O-ban van, síkja pedig az n irányra merőleges, akkor a (11) így írható Stokes tételének fölhasználásával:

$$\int_{(f)} (\text{rot}\,\mathfrak{E})_n \, df = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{(f)} \mathfrak{H} df. \tag{12}$$

Az R körnek említett választása mellett a (rot $\mathfrak{E})_n$-ből az n indexet elhagyhatjuk, mert n és rot $\mathfrak{E}$ iránya ugyanaz.

Húzzuk ismét össze az R sugarú kört az O körül úgy, hogy egy ponttá zsugorodjék össze, akkor éppen úgy, mint az előbbi esetben a határátmenet után az O pontra nézve megkapjuk a Maxwell-féle rendszer második csoportját:

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{II}$$

Itt is meg kell jegyeznünk, hogy a (11) alatti egyenlet eredetileg csak zárt vezetőben végbemenő jelenségre vonatkozik s ismét az elektromágneses tér Faraday-Maxwell-féle felfogását aknázzuk ki, a midőn feltesszük, hogy ugyanoly törvények szabják meg az elektromos és mágneses tér erősségét a dilektrikumban is.

Az átmenet az éterről tetszésszerinti nyugvó dielektrikumra most már könnyen megtörténhetik. Ha ε a dielektromos együttható, akkor az (I) egyenlet levezetésében a lemezes sűrítő C kapacitását ε-nal kell szorozni, tehát a végeredmény;

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{I'}$$

lesz.

A (II) egyenlet levezetésében pedig a μ mágneses permeábilitást kell tekintetbe vennünk; ha μ permeábilitású anyagot helyezünk $\mathfrak{H}$ erősségű mágneses térbe, akkor az anyag az erővonalak eloszlását oly módon fogja megváltoztatni, hogy az erővonalak irányára merőleges 1 cm^2 nagyságú felületelemen most már $\mu\mathfrak{H}$ erővonal fog áthaladni ($\mu<1$ diamágneses, $\mu>1$ paramágneses anyagok). A (II) egyenlet tehát a következőbe megy át:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\mathfrak{H})}{\partial t}.$$

Ha pedig μ $\mathfrak{H}$-tól és az időtől független (*nem* ferromágneses anyagok), akkor az egyenlet alakja:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{II'}$$

Az (I), (II) illetve (I'), (II') egyenletekhez csatlakoznak még az ú. n. folytonossági egyenletek, melyek az $\mathfrak{E}$ és a $\mathfrak{H}$ divergencziáját a kisérlettel valóban kimutatható ú. n. szabad elektromosság és mágnesség sűrűségével kapcsolják össze. A szabad mágnesség sűrűsége egyáltalában mindenütt, dielektrikumban az elektromosság sűrűsége is zérus, tehát az egyenletek:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \tag{III}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{IV}$$

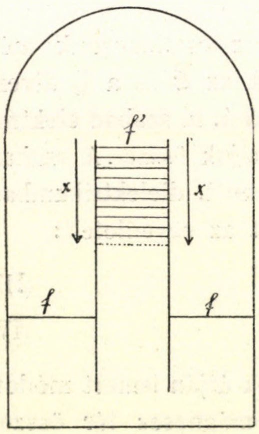
Ezek az egyenletek elemi meggondolások útján ismert módon származtathatók le úgy, hogy az elektromágneses tér összes alapegyenleit valóban elemi, szemléletes módon vezethetjük le.

Zemplén Győző.

NYUGALOMBAN LÉVŐ OLDAT CONCENTRATIO-MEGOSZLÁSA A GRAVITATIÓS TÉRBEN.

GOUY és CHAPERON[1] egy eredményét akarjuk egyszerű úton, egyszerű formában előállítani.

Gondoljuk eszközöknek egy sorát felállítva, a melyek mind hasonlóak, mint a felrajzolt, t. i. elzárt edényben, osmoticus hártyával kettéválasztott cső merül valamely oldószerbe; a cső alsó részében oldószer, a felső részében oldat foglaltatik.



1. ábra.

Valamennyien nyugalomban vannak, ugyanazon hőmérsékleten és úgy rendezzük be a dolgot, hogy a gőznyomás az *oldat* felszinén valamennyiben ugyanakkora. De abban különbözzenek mindezen eszközök, hogy a félig áteresztő hártya különböző távolságban van az oldat felszinétől; gondoljunk egy hosszú sor ilyen csövet, a melyekben a szóbanforgó távolság x, fokozatosan növekszik. Mindezen csövekben

1. a teljes osmoticus emelkedés, azaz a függélyes távolság az oldószer és az oldat felszíne közt ugyanaz; tekintve, hogy hiszen a gőznyomáscsökkenés $(= f' - f)$ is ugyanaz.

2. Ha bármely két eszközben csak olyan mélyen haladunk

---

[1] Ann. de chim. et phys. 12 (1887), 384. o. és köv. V. ö. DUHEM, Journal de phys. 7 (1888), 391. o. és köv.

lefelé az oldatban, a milyen mélyen azon eszköz osmoticus hártyája fekszik, a melynél x rövidebb, akkor a concentratio-eloszlás ezen két eszközben a vizsgált mélységig teljesen megegyező lesz.

Legyen két szomszédos eszközben a semipermeabilis hártya távolsága az oldat felszinétől x, illetve $x+dx$, a concentratio valamely a hártyához végtelenül közelfekvő pontban $c(x)$, illetőleg $c(x+dx)$ és az ezen concentratióknak megfelelő osmoticus nyomások P_x, ill. P_{x+dx}; akkor

$$P_{x+dx} = P_x + g\left(s(c) - s\right) dx,$$

a hol $s(c)$ az oldat sűrűségét jelenti c concentration, és $s = s(o)$ a tiszta oldószerét; g a gravitatiós constans. Másképpen

$$\frac{dP}{dc}\frac{dc}{dx} = g\,(s\,(c) - s).$$

Ezen föltétel f' választásától független, a mint annak lennie is kell.

Ha az oldat egy olyan teret tölt be, a hol a tömegegységre az (x, y, z) pontban az

$$X\,(x, y, z),\quad Y\,(x, y, z),\quad Z\,(x, y, z)$$

összetevőkkel biró erő működik, akkor a concentratio változni fog pontról-pontra, még pedig eleget téve a differentiálegyenletnek

$$\frac{\partial c}{\partial x} = X\frac{s\,(c) - s}{\frac{dP}{dc}},\quad \frac{\partial c}{\partial y} = Y\frac{s\,(c) - s)}{\frac{dP}{dc}},\quad \frac{\partial c}{\partial z} = Z\,\frac{s\,(c) - s}{\frac{dP}{dc}}$$

X, Y, Z lehet a gravitatio intenzitása, vagy pedig a centrifugalis erő.

Ezen egyenletek hasonlóak a hydrostatika egyenleteihez és azt jelentik, hogy az erőfüggvény niveaufelületei összeesnek az egyenlő concentratiójú felületekkel; $\frac{dP}{dc}$ mindig positiv, tehát a concentratio az erővonalak irányában nő vagy fogy, a szerint, hogy az oldat fajsúlya nagyobb vagy kisebb-e, mint az oldószeré.

Ezen változás nagyságrendje azonban igen kicsiny; mert ha

$$\frac{dP}{dc} = KT,$$

akkor a concentratiováltozás centiméterenkint:

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\text{fajsúlyok különbsége.}}{\text{moltérfogat} \times \text{grammsúlyban mért nyomás.}}$$

A Gouy és Chaperon által adott formula (i. h.) az ittenivel megegyező lesz, ha tekintetbe vesszük Roault törvényét a gőznyomáscsökkenésről.

Pólya György.

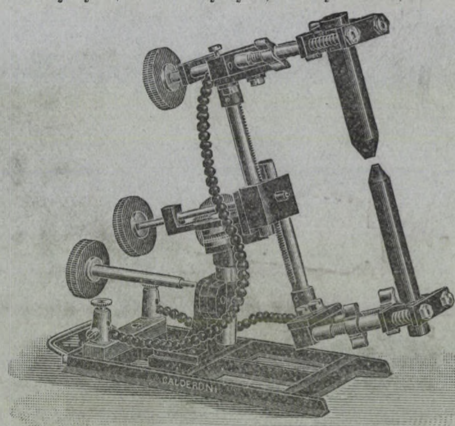
36, 44, 77, 73, 37,

Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350.**—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24.**—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Elektromos ívlámpa legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120.**—

Elektromos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90.**—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50.**—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110.**—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8.**—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30.**—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerübben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	**45.**—	**65.**—	**90.**—	**145.**—	**200.**—	**240.**— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

Franklin-Társulat nyomdája

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ ÉS RADOS GUSZTÁV

HUSZONEGYEDIK ÉVFOLYAM

V., VI., VII., VIII. FÜZET 1912 MÁJ.—OKT.—NOV.—DEC.

BUDAPEST

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

1912.

TARTALOM.

A Mathematikai és Physikai Lapok évenként 8, legalább 3 ívnyi füzetben jelennek meg, még pedig, a nyári hónapok kivételével, mindenkor a hó második felében. Az egész évfolyam 24 30 ív terjedelmű lesz. Előfizetési ára 10 korona. A Mathematikai és Physikai Társulat tagjai tagsági díjuk fejében kapják.

Társulati mondanivalók. A huszonegyedik társulati év 1912 január 1-én kezdődött.

A *tagsági díj* (Budapesten 10 korona, vidéken 6 korona (az Alapszabályok VII. 12. §-a szerint az év első negyedében esedékes. Kérjük t. Tagtársainkat, sziveskedjenek a tagsági díjat a társulat pénztárnoka: *Privorszky Alajos* egyet. magántanár (VII., Ilka-u. 32.) czimére beküldeni. *A mult évekről hátralékban levő t. Tagtársainkat sürgősen kérjük a tagsági díj beküldéseért.*

A *Math. és Phys. Lapok* I. és III. évfolyama már csak nehány teljes példányban van meg és csak az egész sorozat megvételével szerezhető be. Az I. kötet ára 10 korona, a többieké 6—6 korona.

Az első és harmadik évfolyam első füzetjét két-két koronával váltjuk be.

Rendes ülések. A társulat üléseit rendszerint minden hónap *első* és *harmadik csütörtökén* tartja a tud. egyetem physikai intézetében (VIII., Eszterházy-u. 3), d. u. 6 órakor. Az előadások tárgyát — egy mathematikai és egy physikai tárgy — 2—3 nappal az ülés előtt a napi lapokban kihirdetjük.

A tagajánlások, a társulati ügyekre vonatkozó kérdések és kivánságok *Kövesligethy Radó* ügyvivőtitkár czimére **VIII., Múzeum-körút 6.** intézendők.

A folyóirat szellemi részét illető küldemények (czikkek, feladatok, kérdések, stb.) a szerkesztőkhöz küldendők; a mathematikai tárgyúak *Rados Gusztáv*, **IX., Ferencz-körút 38. sz.**, a physikai tárgyúak pedig *Kövesligethy R.* czíme alatt. A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

Igen tisztelt munkatársainkat értesítjük, hogy a választmány határozatából a szokott 25 különlenyomatot ezentúl üres borítékkal adjuk; nyomtatott borítékot csak külön kivánságra, a megfelelő nyomdai költségek felszámításával adhatunk.

☞ A reclamatiók, czímváltozások a pénztárnokhoz intézendők.

KOLLINEÁR ALAPALAKZATOK INVOLUTORIUS METSZETEI.

(Első közlemény.)

I. Egyméretű alapalakzatok.

1. Egy síkbeli projektiv sugársorok.

Ugyanazon síkban levő két projektiv sugársorból a sík egy tetszőleges egyenese két egyesített projektiv pontsort metsz ki, keressük azon egyenesek összességét, melyeknél a kimetszett projektiv pontsorok involutoriusak, röviden: melyek a két sugársort involuczióban metszik.

A sík egy tetszésszerinti pontján át egy ily egyenes halad.

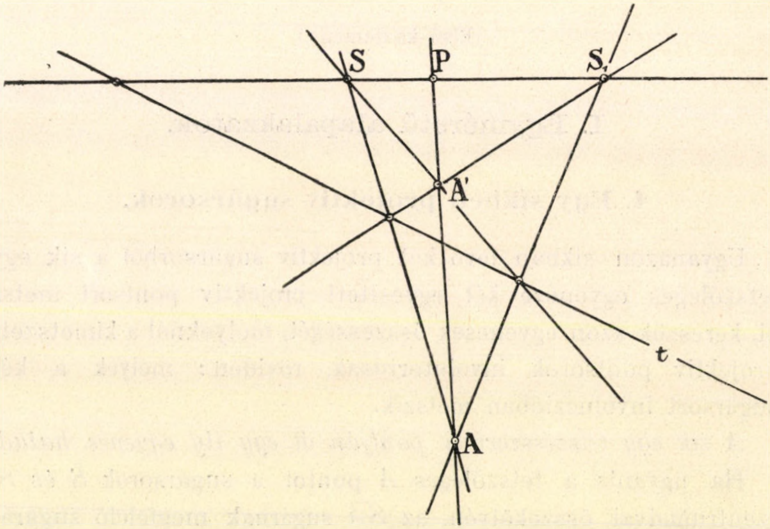
Ha ugyanis a tetszőleges A pontot a sugársorok S és S_1 czentrumaival összekötvén, az $\overline{SA}$ sugárnak megfelelő sugarat az $|S_1|$ sugársorban, az $\overline{S_1A}$ sugár megfelelőjét az $|S|$ sugársorban meghatározzuk, ezek A' metszéspontján és az A ponton áthaladó egyenes, $\overline{AA'}$ a kivánt tulajdonsággal biró egyetlen egyenes az A ponton keresztül.

$\overline{AA'}$ involuczióban metszi a két sugársort, mert a kimetszett két projektiv pontsorban A és A' pontok felcserélhetőleg felelnek meg egymásnak. Az A ponton áthaladó minden más sugár az $\overline{SA'}$ és $\overline{S_1A'}$ sugarakat két különböző pontban metszvén, a rajta keletkezett projektivitás nem lehet involuczió. Ennélfogva:

egy síkbeli két projektiv sugársort involuczióban metsző egyenesek egy sugársort alkotnak.

E sugársor P czentrumának meghatározásánál három esetet különböztetünk meg.

Ha $|S|$ és $|S_1|$ nincsenek egyesitve és nem perspektivek, röviden: általános helyzetűek, úgy P nem egyéb, mint a közös $\overline{SS_1}$ sugárnak mindkét sugársorban megfelelő két egyenes metszéspontja, más szóval: az $\overline{SS_1}$ sugárnak polusa azon k kúpszeletre nézve, mely az $|S|$ és $|S_1|$ projektiv sugársorok képződménye.



1. ábra.

Második eset, midőn $|S|$ és $|S_1|$ perspektivek. (1. ábra.) Ekkor $\overline{SS_1}$ önönmagának felelvén meg, az előbbi szerkesztés P meghatározására nem alkalmas.

Ha ez esetben a tetszőleges A ponthoz a fentebbi értelemben megszerkesztjük az A' pontot, úgy az $\overline{SA}$, $\overline{S_1A}$, $\overline{SA'}$ és $\overline{S_1A'}$ egyenesek egy teljes négyoldalt alkotnak, melynek diagonalisai az $\overline{AA'}$, $\overline{SS_1}$ és a perspektivitás tengelye t. Tehát $\overline{AA'}$ és t az S és S_1 pontokat harmonikusan választja el, miből következik, hogy, ha A változik is, az $\overline{AA'}$ egyenes ugyanazon pontban metszi az $\overline{SS_1}$ egyenest, ez a pont a P.

Az egy síkbeli perspektiv sugársorokat involuczióban metsző egyenesek oly sugársort alkotnak, melynek P czentruma a közös sugaron van és a két S és S_1 czentrumot harmonikusan választja el a perspektivitás tengelyétől.

Ezen esetben a $|P|$ sugársor minden eleme hiperbolikus involuczióban metszi az $|S|$ és $|S_1|$ sugársorokat, a duplapontok egyike mindig a P pont, a másika pedig a t perspektivitás-tengelyt írja le. Kivételes az $\overline{SS_1}$ egyenes, melynek a két sugársorral való metszete határozatlan, a folytonosság fentartása czéljából vehetjük azon involutorius pontsornak, melyet a P és $(\overline{SS_1}t)$ duplapontok határoznak meg.

Harmadik eset, midőn a két projektiv sugársor czentruma közös. Ekkor lehetséges, hogy a két sugársor involucziót alkot, mikor is a sík összes egyenesei megfelelnek a kitűzött követelménynek. Ez tehát kivételes eset. Ha azonban az egyesített projektiv sugársorok nem involutoriusak, úgy P pont összeesik a sugársorok közös czentrumával.

A talált eredményeket a kivételes eset kihagyásával és a duális és recziprok tételek szembeállításával a következőkben foglaljuk össze:

a) *Két egy síkbeli projektiv sugársort involuczióban metsző egyenesek egy sugársort alkotnak, melynek czentruma az általános esetben a közös sugárnak mindkét értelemben megfelelő sugarak metszéspontja, perspektivitás esetében azon pont, melyet a perspektivitás-tengelytől a két czentrum harmonikusan választ el, végre egyesített sugársorok esetében a közös czentrum.*

b) *Két egy síkbeli projektiv pontsort involuczióval projicziáló pontok egy pontsort alkotnak, melynek sorozója az általános esetben a közös pontnak mindkét értelemben megfelelő pontokat összekötő egyenes, perspektivitás esetében azon egyenes, melyet a perspektivitás-czentrumtól a két pontsor sorozója harmonikusan választ el, végre egyesített pontsorok esetében a közös sorozó.*

c) *Két egy pontbeli projektiv síksort involuczióban metsző síkok egy síksort alkotnak, melynek tengelye az általános esetben a közös síknak mindkét értelemben megfelelő síkok metszésvonala, perspektivitás esetében azon egyenes, melyet a perspektivitás-síktól a két síksor tengelye harmonikusan választ el, végre egyesített síksorok esetében a közös tengely.*

d) *Két egy pontbeli projektiv sugársort involutorius síksorral projicziáló egyenesek egy sugársort alkotnak, melynek síkja az általános esetben a közös sugárnak mindkét értelemben megfelelő sugarak összekötő síkja, perspektivitás esetében azon sík, melyet a perspektivitás-tengelytől a két sugársor síkja harmonikusan választ el, végre egyesített sugársorok esetében a közös sík.*

A *c)* és *b)* recziprok tételeket a következő tárgyalásokra való tekintettel, még a következőkép is fogalmazhatjuk:

Mindazon egyenesek, melyek két projektiv és közös síkkal biró síksort involuczióban metszenek egy speczіális lineáris komplexot, sugártengelyt alkotnak, melynek tengelye az általános esetben a közös síknak mindkét értelemben megfelelő síkok metszésvonala, perspektivitás esetében azon egyenes, melyet a perspektivitás-síktól a két síksor tengelye harmonikusan választ el, végre egyesített síksorok esetében a közös tengely.

Mindazon egyenesek, melyek két projektiv és közös ponttal biró pontsort involutorius síksorral projicziálnak egy speczіális lineáris komplexot, sugártengelyt alkotnak, melynek tengelye az általános esetben a közös pontnak mindkét értelemben megfelelő pontok összekötő egyenese, perspektivitás esetében azon egyenes, melyet a perspektivitás-czentrumtól a két pontsor sorozója harmonikusan választ el, végre egyesített pontsorok esetében a közös sorozó.

2. Projektiv síksorokat involuczióban metsző sugarak.

Két $[s]$ és $[s_1]$ projektiv síksorra nézve, melyeknek tengelyei általános helyzetűek, kitérők, meghatározandó azon egyenesek összessége, melyek mindenike e két síksor megfelelő síkjaiból egy involuczió pontpárjait metszi ki.

Ha a tér egy tetszőleges P pontján áthaladó ily egyeneseket keresem, úgy az $[sP]$ és $[s_1P]$ sík megfelelőjét határozom meg az $[s_1]$, illetőleg $[s]$ síksorban. E két sík p' metszésvonalát, mint pontsort, a P pontból projicziáló sugarak a követelménynek megfelelnek.

Ha pedig a π síkban keresem a jellemzett sugarakat, úgy e síkot metszéshez hozom az $[s]$ és $[s_1]$ síksorral, a metszet két projektiv sugársor. Az ezeket involuczióban metsző sugarak a követelménynek megfelelnek.

Látjuk tehát, hogy

mindazon egyenesek, melyek két $[s]$ *és* $[s_1]$ *projektiv síksort involuczióban metszenek, egy lineáris sugárkomplexot alkotnak.*

Ha minden síkhoz megfelelőül rendelem a benne levő komplexsugársor czentrumát, úgy — mint ismeretes — egy elsőfokú (közönséges) nullszisztémát kapok; vizsgáljuk közelebbről a tárgyalt esetben fellépő nullszisztéma megfelelő elempárjait.

Az $[s]$ és $[s_1]$ projektiv síksorok képződménye a H hiperboloid alkotó sora.

Bármely α sík, mely az a alkotón áthalad két perspektiv sugársort metsz ki az $[s]$ és $[s_1]$ síksorokból; ezeknek perspektivitás-tengelye t a hiperboloid azon vezérvonala, mely α síkban van. Most már α nullpontja, mint az 1. pontból következik, az a azon A' pontja, melyet a (ta) ponttól harmonikusan választ el az s és s_1 egyenes.

Ha az α sík az $[a]$ síksort írja le, úgy A' az (a) pontsort futja be. Ha pedig az α sík a t vezérvonal körül ír le egy síksort, nullpontja azon t' vezérvonalat futja be, melyet az s és s_1 egyenes harmonikusan választ el a t egyenestől.

Összefoglalva:

A H hiperboloid minden alkotója a nullszisztémában önmagának felel meg, vezérvonalai egymásnak megfelelvén involucziót alkotnak, melynek dupla sugarai s és s_1 egyenesek. Az $[s]$ síksor bármely síkjának nullpontját az $[s_1]$ megfelelő síkja metszi ki és fordítva.

Az összes egyenesek, melyek az $[s]$ és $[s_1]$ projektiv síksorokat involuczióban metszik, a nullszisztémában önmaguknak felelnek meg, nullsugarak, mert egy ilyenen áthaladó minden sík nullpontja ugyanezen egyenesre esik.

Mint fentebb láttuk a tetszőleges P pont nullsikját megkapjuk, ha az $[sP]$ és $[s_1P]$ síkoknak az $[s_1]$, illetőleg $[s]$ síksorban megfelelő $[s_1p']$ és $[sp']$ síkok p' metszésvonalát a P ponttal összekötjük. Ha most az $[sP]$ és $[s_1P]$ síkok metszésvonalát p-vel jelölöm, világos, hogy p és p' a nullszisztémában egymásnak megfelelő egyenesek. A H hiperboloiddal meghatározott polárrecziproczitásban e két egyenes szintén megfelel egymásnak. Mert a p-n áthaladó síkok a H-t kúpszeletben metszik, melyre nézve p-nek polusa a nullpont a p'-n.

Az s és s_1 egyenesek bármely p transversalisának a nullszisztémában ugyanezen egyenesek oly p' transversálisa felel meg, mely p-nek polárisa a H hiperboloidra nézve.

E szerint még a tetszőleges P pont nullsíkjának megszerkesztését a következőkép vihetjük keresztül: P-ből transversálisát szerkesztem az s és s_1 egyeneseknek, ennek a H hiperboloidra vonatkozó polárisa a P ponttal meghatározza a keresett nullsíkot.

Azaz

bármely pont nullsíkját és polársíkját az s és s_1 egyenesek harmonikusan választják el egymástól.	bármely sík nullpontját és polusát az s és s_1 egyenesek harmonikusan választják el egymástól.

Ugyanez más szavakkal:

az $[s]$ és $[s_1]$ projektiv síksorok egy polárrecziproczitást és egy nullszisztémát határoznak meg, melyek a Σ és Σ'', illetőleg

Σ és Σ' tereket reczíprok vonatkozásba hozván, a Σ' és Σ'' terek kollineácziója egy térbeli involuczió, melynek tengelyei az s és s_1 egyenesek.

Minthogy az involuczióban nullsugárnak nullsugár felel meg, e nullsugarak komplexe önmagának felel meg.

3. A lineáris sugárkomplex elméletéhez.

A lineáris sugárkomplex elmélete szempontjából elsőrendű kérdés annak eldöntése, hogy a projektiv s és s_1 síksorok, melyeket a komplex elemei involuczióban metszenek, illetőleg e síksorok sorozói a komplexre nézve szinguláris, kivételes síksorok, illetőleg egyenesek-e vagy sem?

E kérdésre úgy felelünk, hogy megkiséreljük a komplex két kitérő, különben tetszőleges sugarán, mint sorozón oly projektiv síksorokat előállítani, melyeket a komplex összes többi sugarai involuczióban metszenek.

Legyen a komplex két egymást nem metsző, különben tetszőleges sugara u és u_1. Az $[u]$ síksor nullpontjai az (u) pontsort alkotják. Ha ez utóbbit az u_1-ből az $[u_1]$ síksor projicziálja, úgy az $[u]$ és $[u_1]$ síksorok projektivek és megfelelő síkjaik metszésvonalai komplex sugarak.

E két projektiv síksor feladatunknak megfelel. Ugyanis a tetszőleges π sík P' nullpontján a (πu) és (πu_1) pontok nullsíkjai $[P'u]$ és $[P'u_1]$ áthaladnak. Miből pedig következik, hogy az $[u]$ és $[u_1]$ projektiv síksorokat a $|P'\pi|$ komplex-sugársor minden eleme involuczióban metszi, mert $[uP']$ síknak megfelelője $[u_1(u\pi)]$ sík és $[u_1P']$ megfelelője az $[u(u_1\pi)]$ sík, már pedig $[u_1(u\pi)]$ és $[u(u_1\pi)]$ metszésvonala a π síkba esik.

Az általános lineáris komplex bármely két kitérő sugara sorozója oly két projektiv síksornak, melyek a komplex összes többi sugarait involuczióban metszik.

E két síksor megfelelő elemeinek metszésvonalai egy hiperboloid alkotói, egyszersmind azon komplex sugarak, melyek e síksorok tengelyeit metszik.

Ezzel ki van mutatva, hogy az s és s_1 egyenesek nem szinguláris sugarai a komplexnek.

Még meg kell vizsgálnunk, hogy, ha u és u_1 egymást metszi, lehetséges-e, az általuk, mint tengelyek által, meghatározott síksorok projektivitását olykép meghatározni, hogy a komplex minden más sugarából involucziót messenek ki?

Ha lehetséges, akkor a komplex minden sugarán a közös $[uu_1]$ síktól kimetszett pontnak oly pont felel meg, mely e síknak mindkét értelemben megfelelő két sík metszésvonalán van. Ha tehát a komplex nem speczialis, úgy kell, hogy az $[uu_1]$ síknak, mint az $[u]$ síkjának megfeleljen az $[u_1]$ minden síkja és viszont. Ámde ez esetben nemcsak a komplex, de a tér összes sugarai parabolikus involucziót metszenek ki e két síksorból.

Vagyis az általános lineáris komplex esetében a két komplexsugár kitérő volta, tételünk szükséges feltétele.

Nézzük most már, hogyan módosulnak e pontban talált eredményeink a speczialis lineáris komplex esetében.

Ha az n tengelyű $|n|$ speczialis lineáris komplex két egymást a tengelyen metsző sugara az u és u_1, akkor az $[u]$ és $[u_1]$ síksorokat, mindig lehet olykép projektivitásba hozni, hogy az $|n|$ sugarai őket involuczióban metszik. Ha ugyanis az $[uu_1]$ sík a tengelyt nem tartalmazza, akkor e síknak megfelelőül veszem az egyik értelemben az $[u_1n]$, a másik értelemben az $[un]$ síkot és a harmadik síkpárt tetszőlegesen választom: úgy már meg van a kivánt projektivitás. Ha az $[uu_1]$ sík a tengelyt magában tartalmazza, akkor az $[u]$ és $[u_1]$ síksort akképen kell perspektiv vonatkozásba hoznunk, hogy a perspektivitás-sík az $[uu_1]$ síkból kimesse az n egyenes harmonikus párját az u és u_1 sugarakra nézve.

Ha az u és u_1 metszéspontja nem esik a tengelyre, úgy ismét szinguláris projektivitás felel meg a követelménynek.

Ha végül u és u_1 kitérő, akkor a mindkettőt metsző komplexsugarak két sugársort alkotnak, az egyik $|(un)[u_1n]|$, a másik $|(u_1n)[un]|$. A követelménynek megfelelő projektivitás ismét szinguláris még pedig az $[u]$ szinguláris síkja az $[un]$, míg az $[u_1]$ szinguláris síkja az $[u_1n]$ lesz; és ekkor az $[n]$ sugarai és csakis ezen sugarak metszik involuczióban az $[u]$ és $[u_1]$ projektiv síksorokat.

Mindebből következik:

Ha két projektiv síksor nem tartalmaz szinguláris elemet, úgy az őket involuczióban metsző sugarak általános, vagy speczialis lineáris komplexot alkotnak a szerint, a mint tengelyeik kitérők, vagy egymást metszők.

Visszatérve az általános lineáris komplexre, ennek tetszőleges u sugarát kétszeresen végtelen sok komplexsugár metszi, az összes többi komplexsugár az u-val meghatároz egy-egy hiperboloidot, melynek minden alkotója komplexsugár, ellenben vezérvonalai között csak az említett kettő tartozik a komplexbe. Ennélfogva háromszorosan végtelen sok ily hiperboloid tartalmazza az u egyenest vezérvonalul.

Ezen hiperboloidok az u egyenes minden pontjában érintkeznek egymással.

Ha ugyanis u a hozzá kitérő helyzetű u_1 és u_2 komplexsugarakkal a H_1 és H_2 hiperboloidot határozza meg, az u egy tetszőleges pontjából mindenik hiperboloidnak egy alkotója indul ki; de ezek, mint nullsugarak az u-val egy síkban e pont nullsíkjában vannak, mely tehát e pontban mindkét hiperboloidot érinti.

Bebizonyítjuk még, hogy

öt tetszőleges egyenes meghatároz egy őket tartalmazó lineáris komplexot.

Ennek kimutatására az előzmények tekintetbe vételével elégséges lesz bebizonyítani, hogy az öt sugár bármelyikének pontjaihoz a nullsíkot megszerkeszthetjük.

Felhasználjuk azon ismert tételt, hogy, ha egy hiperboloid három alkotója a lineáris komplexbe tartozik, úgy valamennyi alkotója komplexsugár. Az adott a, b, c, d és e komplexsugarak egyikének, például a-nak A pontjához tartozó nullsíkot keresvén megszerkesztjük az $\{abc\}$ és $\{ade\}$ hiperboloid[1] azon vezérvonalát, mely A ponton áthalad. E két vezérvonal meghatároz egy síkot, melyben a hiperboloidok egy-egy alkotója is előfordul. Minthogy e két alkotó komplexsugár, metszéspontjuk síkjuknak nullpontja. Ez utóbbi pontot az a egyenessel összekötő sík a keresett nullsík.

Látjuk ebből, hogy e szerkesztés két esetben lehet határozatlan, először, ha az A ponton át csak egy vezérvonal halad, másodszor, ha az A ponton ugyan két különböző vezérvonal vonható, de ezek síkjában csak egy alkotó van.

Ha az első eset az a minden pontjában bekövetkezik, úgy az adott öt egyenes egy hiperboloidon van és ekkor valóban nem határoz meg lineáris komplexot. Ha csak egy pontban fordul elő ez, úgy egy speciális lineáris komplexszel van dolgunk. A második esetben az $\{abc\}$ és $\{ade\}$ hiperboloidok két közös alkotót és ennélfogva két közös valós, vagy konjugált képzetes vezérvonalat is tartalmaznak, azaz az öt egyenes egy lineáris kongruencziába tartozik, mely esetben ismét nem határoznak meg egy lineáris komplexot.

*

A reciproczitás törvénye alapján nyilvánvaló, hogy a projektiv síksorokra talált eredményeink — mutatis mutandis — áttehetők a projektiv pontsorokra is. Itt csak a főtételt akarjuk megemlíteni.

Ha két projektiv pontsor nem tartalmaz szinguláris elemet, úgy mindazon tengelyek, melyekből e két pontsor involutorius síksorokkal projicziáltatik, általános vagy speciális lineáris komplexot alkotnak a szerint, a mint ama pontsorok sorozói kitérők, vagy egymást metszik.

---

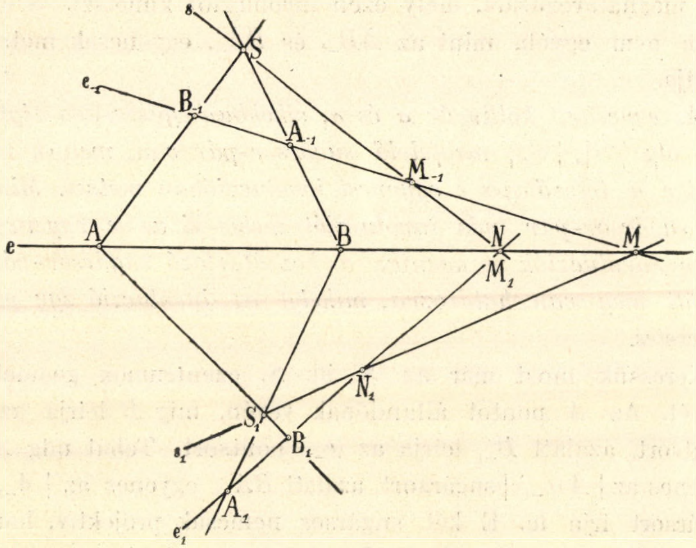
[1] Az $|abc|$ jellel jelöljük a hiperboloid azon alkotósorát, melynek vezérvonalai az a, b és c egyenesek; ellenben $\{abc\}$ jellel azon alkotósort, melybe az a, b és c egyenesek is bele tartoznak. Az »$\{abc\}$ hiperboloid« tehát az, melynek az a, b és c egyenesek alkotói.

II. Kétméretű alapalakzatok.

4. Egyesített kollineár síkokban előálló involucziók.

Ha problémánkat két és három dimensiós alapalakzatokra akarjuk átvinni, nyilván módositanunk kell azt.

Erre nézve kiindulásul és egyszersmind a következők számára alapvetőül az egyesített kollineár síkokat választjuk, melyeknél problémánk a következőkép fogalmazható:



2. ábra.

a σ és σ_1 egyesített kollineár síkokban határozzuk meg azon megfelelő sugársor-párokat, melyek az adott e egyenest involuczióban metszik.

Egyelőre felteszszük, hogy a σ és σ_1 projektivitása általános jellegű, azaz csak három önönmagának megfelelő pontjuk van és szingularis elemük nincs. Felteszszük továbbá, hogy az e-nek, mint a σ egyenesének a σ_1-ben megfelelő e_1 és mint a σ_1 egyenesének σ-ban megfelelő e_{-1} egymástól és az e-től különbözik.

Ha már most $|S|$ és $|S_1|$ két megfelelő sugársor, mely az e egyenest involuczióban metszi és ez involuczió egy pontpárja A, B, úgy kell, hogy az $\overline{SA}$, ill. $\overline{SB}$ sugárnak megfeleljen $\overline{S_1B}$, ill. $\overline{S_1A}$ sugár. De ha ez áll, akkor e két utóbbi sugár tartalmazza A_1, ill. B_1 pontot, míg az $\overline{SA}$, ill. $\overline{SB}$ tartalmazza a B_{-1}, ill. A_{-1} pontot, t. i. a B, ill. A pontnak, mint a σ_1 pontjának, a σ-ban megfelelőt.

Látjuk ebből, hogy az e egyenesen felvehetjük egy involuczió egy A, B párját és ez elegendő azon $|S|$, $|S_1|$ sugársorpár meghatározására, mely ezen involucziót kimetszi. S czentrum nem egyéb, mint az $\overline{AB_{-1}}$ és $\overline{BA_{-1}}$ egyenesek metszéspontja.

Az egyesített kollineár σ és σ_1 síkokban egyszerűen végtelen sok oly $|S|$, $|S_1|$ megfelelő sugársor-pár van, melyek mindenike a tetszőleges e egyenest involuczióban metszi. Minden ily sugársor-pár más involucziót metsz ki az e egyenesből. Ezen involucziók mindenike a hozzátartozó sugársor-párral együtt meg van határozva, mihelyt az involuczió egy párja ismeretes.

Keressük most már az S, ill. S_1 czentrumok geometriai helyét. Az A pontot állandónak vévén, míg B leírja az (e) pontsort, azalatt B_{-1} leírja az (e_{-1}) pontsort. Tehát míg $\overline{AB_{-1}}$ egyenes az $|A(e_{-1})|$ sugársort, azalatt BA_{-1} egyenes az $|A_{-1}(e)|$ sugársort írja le. E két sugársor nemcsak projektiv, hanem perspektiv is, mert midőn B az A pontba jut, akkor B_{-1} az A_{-1} ponttal esik össze, tehát e két sugársor közös sugara önönmagának felel meg. Így a megfelelő sugarak metszéspontjai — a közös sugarat nem számítva — egy egyenest alkotnak: ez az S czentrumok geometriai helye, az s egyenes.

Tehát a megfelelő S_1 czentrumok geometriai helye is egy egyenes, t. i. s_1.

Azon két pont N és M, melyben s és s_1 metszi az e egyenest, az összes involucziók közös párja.

A σ és σ_1 egyesített kollineár síkok mindazon S, S_1 pontpárjainak geometriai helye, melyek az adott e egyenest in-

voluczióban metsző sugársor-párok czentrumai, két megfelelő s, s_1 *egyenes. Ezeknek az e egyenessel való két metszéspontja, az összes involucziók közös párja.*

Ezen N és M pontokról még kimutathatjuk, hogy egymásnak megfelelő pontok. Ugyanis az $|S|$ sugársorok mindazon sugarainak, melyek M-en áthaladnak, oly sugarak felelnek meg, melyek az N-en haladnak át: tehát $N \equiv M_1$. Minthogy pedig az önönmaguknak megfelelő egyenesek kivételével, minden egyenesen van egy, de csakis egy pontpár, kell, hogy $M \equiv (ee_{-1})$ és $N \equiv (ee_1)$ legyen. Vagyis az e, e_1 és s egyenesek ép úgy, mint e, e_{-1} és s_1 egyenesek egy pontban találkoznak.

Ezen észrevételt még felhasználhatjuk az s és s_1 egyenesek megszerkesztésére, mert $s \equiv \overline{NM_{-1}}$ és $s_1 \equiv \overline{MN_1}$.

Áttérhetünk ezek után az e egyenes egyes különös helyzeteinek vizsgálatára.

Ha e az egyesített projektiv sikok valamely F duplapontján áthalad, de nem felel meg önmagának, úgy az M és N összeesik az F-fel. Tehát a rajta előálló összes involucziók egyik duplapontja F. Az s és s_1 megszerkesztésére ez esetben az F nem elégséges, vissza kell térnünk az eredeti szerkesztésre.

Ha e önönmagának felel meg, úgy bármely pontpárja két megfelelő, perspektiv sugársor sorozója: az ezeket involuczióban metsző sugársorok P czentruma ugyanezen egyenesen van Ennélfogva az önmagának megfelelő egyenesre nézve az s és s_1 összeesik ugyanezen egyenessel.

Kivételes esettel van dolgunk, ha az önmagának megfelelő egyenesen egyesített megfelelő pontsorok involucziót alkotnak, mert ez esetben a σ és σ_1 összes megfelelő sugársorai involuczióban metszik ezen egyenest.

Ily önönmagának megfelelő egyenes nemcsak akkor fordulhat elő, ha a σ és σ_1 kollineácziója involutorius, hanem előfordulhat akkor is, ha a σ és σ_1 projektivitásában csak végesszámú duplapont van. Jelen vizsgálódásunk pedig ez utóbbi feltétel mellett történt.

Nézzük tüzetesebben a kollineáczió ezen különös esetét.

5. Speczialis kollineácziók.

Ha az egyesített kollineár σ, σ_1 síkokban van két különböző önönmagának megfelelő egyenes, melyen a megfelelő egyesített pontsorok involucziót alkotnak, akkor a két sík kollineácziója involutorius, azaz minden pontpárja felcserélhetőleg felel meg egymásnak.

Ha két egyesített kollineár síkban találunk egy pontpárt, mely felcserélhetőleg felel meg egymásnak, akkor e pontpár által meghatározott g egyenes önönmagának felel meg és a rajta egyesített pontsorok kollineácziója involutorius.

Kérdés, lehetséges-e oly síkbeli kollineáczió, melynél van egy, de csakis egy ily pontsor?

A σ és σ_1 kollineáczióját meghatározzuk, ha felveszszük az önönmaguknak megfelelő F, G és H pontokat és azonfelül még egy A, A_1 pontpárt, melynek egyik tagja sem esik az FGH háromszög valamely oldalára.

Ha már most az A, A_1 pontpárt úgy választjuk, hogy a $\overline{GA}$ és $\overline{GA}_1$ egyenes a $\overline{GF}$ és $\overline{GH}$ sugárpárt harmonikusan választja el, de az $\overline{AA}_1$ egyenes nem halad át sem az F, sem a H duplaponton, úgy az FH, azaz g egyenes megfelelő, involutorikus pontsorok sorozója, ellenben kívüle nincs felcserélhetőleg megfelelő pontpár. Mert, ha volna, akkor minden pontpár és így az A és A_1 is felcserélhetőleg megfelelő volna, de akkor az $\overline{AA}_1$ egyenesnek, vagy az F, vagy a H duplaponton át kellene haladnia.

Tehát valóban lehetséges, hogy két egyesített kollineár síkban van egy, de csakis egy oly önönmagának megfelelő egyenes, melynek pontpárjai involucziót alkotnak.

Ez esetben van e kollineár síkokban oly sugársor is, melynek elemei felcserélhetőleg felelnek meg egymásnak.

Ha az involutorius g pontsoron kívül van duplapontja e kollineár síkoknak, úgy állításunk nem szorul bizonyításra. Ha pedig nincs a g egyenesen kívül eső duplapont, akkor a következőkép okoskodunk.

Legyen A pontnak az egyik, illetőleg másik értelemben megfelelő pont A_1, ill. A_{-1}; így az $|A|$ sugársornak megfelel az $|A_1|$, ill. $|A_{-1}|$ sugársor. E két utóbbi sugársor nemcsak projektiv, hanem perspektiv is a g egyenesre, mint perspektiv tengelyre nézve, tehát közös sugaruk önmagának felel meg.

Ennélfogva az $|A|$ sugársorban van egy sugár, melynek úgy a σ_1, mint a σ síkban ugyanazon egyenes felel meg. Ezen két egyenes metszéspontja duplapont és sorozója két megfelelő, involutorius sugársornak. Ha már most e duplapont G nem esik a g-n kívül, úgy magán a g-n van.

Ha az egyesített, kollineár σ és σ_1 síkoknak van egy, de csakis egy involutoriusan megfelelő pontsora, akkor mindig van egy, de csakis egy involutoriusan megfelelő sugársora is.

A kollineáczió ezen esetét a következőkben rövidség kedvéért «*fél-involuczió*»-nak, a g involutorius pontsort *tengelynek*, G pontot, az involutorius sugársor czentrumát *a félinvoluczió czentrumának* fogjuk nevezni.

A G megfelelő egyenesei két különböző értelemben megfelelő és perspektiv pontsorok sorozói. Legyen egy ily (l) pontsor megfelelője (l_1), ill. (l_{-1}), a hol e két utóbbi pontsor sorozói azonosak. Legyen továbbá az (l) és (l_1) pontsorok perspektiv czentruma C, míg az (l_{-1}) és (l) pontsoroké C'. Ha C-nek egy sugara kimetszi az l és l_1 egyenesekből az A, ill. A_1 pontot, továbbá $C'A$ és $C'A_1$ kimetszi l_{-1}-ből, ill. l-ből az A_{-1}, ill. A_2 pontot, úgy világos, hogy a σ sík A_{-1}, A és A_1 pontjainak a σ_1 síkban megfelel A, A_1, ill. A_2 pont. De látjuk ebből, hogy az $\overline{AA_1}$ egyenesnek a két különböző értelemben megfelelő $\overline{A_1A_2}$, ill. $\overline{A_{-1}A}$ egyenesek egymást C'-ben metszik és így C pontnak mindkét értelemben C' felel meg. Más szóval az (l), (l_1) és (l_{-1}), (l) pontsor-párok perspektivitás-czentruma a (g) pontsor két megfelelő pontja.

És fordítva, ha C és C_1 a (g) pontsor két megfelelő eleme, úgy a $|C|$, $|C_1|$ és $|C_{-1}|$, $|C|$ megfelelő és perspektiv sugársorok perspektivitás tengelyei, az l_1 és l egyenesek, a $|G|$ sugársor megfelelő elemei.

A félinvolucząó G czentrumának bármely megfelelő l, l_1 sugárpárja két megfelelő és perspektiv (l), (l_1), ill. (l_{-1}), (l) pontsor-pár sorozója. E pontsor-párok perspektiv czentrumai C, C_1 a félinvoluczió tengelyének megfelelő pontjai, a melyek ismét két $|C|$, $|C_1|$, ill. $|C_{-1}|$, $|C|$ sugársor-pár sorozói az l_1 és l perspektivitás-tengelyekkel.

Ha most már a félinvoluczió esetében keressük a tetszőleges e egyenest involuczióban metsző sugársor-párok czentrumainak geometriai helyét, felhasználhatjuk az előbbi pontban talált szerkesztést. T. i. ha $M \equiv (ee_{-1})$ és $N \equiv (ee_1)$, akkor

$$\overline{NM_{-1}} \equiv s \quad \text{és} \quad \overline{MN_1} \equiv s_1 .$$

Mivel pedig $N \equiv M_1$ és $M_1 M_{-1}$ az előbbiek szerint a G-n áthaladó egyenes: *nyilvánvaló, hogy az s és s_1 a G megfelelő egyenesei.*

Ha e a G ponton áthalad a fenti szerkesztés határozatlan lesz, mert $M \equiv N \equiv G$. Ez esetben az eredeti szerkesztést használván, azaz a perspektiv

$$|A(e_{-1})|, \quad |A_{-1}(e)|$$

sugársorok képződményét keresvén, ugyanazon eredményt találjuk, mint előbb.

Végül, ha e a g-től különböző dupla egyenessel esnék össze, úgy az s és s_1 ugyanezen dupla sugár.

Így látjuk, hogy problémánk szempontjából csak a g egyenes kivételes, mert ezt az összes megfelelő sugársor-párok involuczióban metszik.

*

Ha már most a speciális kollineácziók vizsgálatában tovább menve a σ és σ_1, egyesített kollineár síkokat perspektiv helyzetben levőknek veszszük a C czentrummal és c tengelylyel, úgy a tetszőleges e egyeneshez eredeti szerkesztésünk segélyével mindig meghatározhatjuk az s egyenest, ha csak e nem önönmagának megfelelő.

A talált eredményt még így is mondhatjuk:
három lineáris komplex, vagy egy lineáris komplex és egy lineáris kongruenczia közös sugarai egy hiperboloid alkotói

9. Kivételes és speciális esetek.

A fentebbi tárgyalásoknál feltettük, hogy a $[T]$ és $[T_1]$ kollineár síkpontok síksor-párjai mind más és más lineáris komplexet határoznak meg. Vizsgálnunk kell: e feltevés mennyiben jogosult.

Tegyük fel, hogy a $[T]$ és $[T_1]$ kollineár síkpontokban van két $[a]$, $[a_1]$ és $[b]$, $[b_1]$ síksor-pár, melyek ugyanazon Γ komplexot határozzák meg.

Ha $[ab]$ és $[a_1b_1]$ síkok különbözők, akkor ezek nullpontja Γ-ra nézve T, illetőleg T_1 lévén, szükséges, hogy az $[ab]$ és $[a_1b_1]$ megfelelő síkok metszésvonala, mint komplexsugár e pontokat tartalmazza. Ha továbbá egy tetszőleges π síkkal metszük a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat, kell, hogy az $[a]$, $[a_1]$ és $[b]$, $[b_1]$ síksor-párokból kimetszett $|A|$, $|A_1|$ és $|B|$, $|B_1$ sugársor-párokat involuczióban metsző sugarak ugyanazon $|P$ sugársort alkossák. De ez csak úgy lehet, ha a π síkban $[T]$ és $[T_1]$ metszetének kollineácziója fél vagy teljes involuczió Mindkét esetben $\overline{AB}$ és $\overline{A_1B_1}$ egyenesek G metszéspontja önönmagának felel meg. Ebből pedig következik, hogy az $[ab]$ és $[a_1b_1]$ síkok metszésvonala, tehát a $\overline{TT_1}$ egyenes önönmagának felel meg.

Ha az $[ab]$ és $[a_1b_1]$ síkok összeesnek, akkor első sorban világos, hogy a Γ komplex speciális, melynek u tengelye az (aa_1) és (bb_1) pontokon áthalad és harmonikusan van elválasztva a T és T_1 pontok által úgy az $[a]$ és $[a_1]$, mint a $[b]$ és $[b_1]$ perspektiv síksorok perspektivitás-síkjától az α és β síkoktól. Ez azonban csak úgy lehet, ha α és β a $\overline{TT_1}$ egyenest ugyanazon pontban metszi, vagyis $\overline{TT_1}$ egyenes metszi az $\overline{\alpha\beta}$ egyenest. Ez utóbbi egyenesnek minden pontjában úgy az $[a]$ és $[a_1]$, mint a $[b]$ és $[b_1]$ síksorok két megfelelő síkja tehát a $[T]$ és $[T_1]$ két megfelelő egyenese találkozik, miből következik, hogy a $\overline{TT_1}$ egyenes önönmagának felel meg.

Ha a kollineár $[T]$ *és* $[T_1]$ *síkpontok közös egyenese nem önönmagának felel meg, úgy a két síkpont megfelelő síksorai mind egymástól különböző lineáris komplexokat határoznak meg.*

Egy szükséges feltételt találván arra nézve, hogy a $[T]$ és $[T_1]$ kollineár síkpontok két megfelelő síksor-párja ugyanazon ineáris komplexet határozza meg, a behatóbb vizsgálatot az általánosabb esetre nézve folytatjuk, t. i. midőn az $[ab]$ és $[a_1b_1]$ síkok nem esnek össze és a tetszőleges π sík a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat félinvolaczióban metszi.

Első sorban világos, hogy a π-ben levő félinvolaczió czentruma azon G pont, melyben az $\overline{AB}$ és $\overline{A_1B_1}$ egyenesek, vagyis az $[ab]$ és $[a_1b_1]$ síkok nyomvonalai egymást metszik. De akkor ezen G pontot a $\overline{TT_1}$ önönmagának megfelelő egyenes metszi ki a π síkból, mivel pedig a $|G\pi|$ sugársor involutorius: a $\overline{TT_1}$ tengelyen egyesített megfelelő síksorok involucziót alkotnak. Minthogy pedig a félinvolaczió tana szerint a P sugársor sugarai nemcsak az $|A|$, $|A_1|$ és $|B|$, $|B_1|$ sugársor-párokat metszik involuczióban, hanem mindazon $|X|$, $|X_1|$ sugársor-párokat is, melyeknek czentrumaik az $\overline{AB}$, illetőleg $\overline{A_1B_1}$ egyenesen vannak, következik, hogy a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok mindazon $|x|$, $|x_1|$ síksor-párjai, melyeknek tengelyeik az $[ab]$ és $[a_1b_1]$ síkok megfelelő sugarai, ugyanazon Γ komplex sugarait metszik involuczióban.

Ugyanily eredményt találunk a $[TT_1]$ síksor bármely két megfelelő síkjában levő, megfelelő sugársorokra nézve.

Ha a $[T]$ *és* $[T_1]$ *kollineár síkpontok két megfelelő síksorpárja ugyanazt a lineáris komplexet határozza meg, akkor egyrészt a* $\overline{TT_1}$ *egyenes önönmagának felel meg és megfelelő síkjai involucziót alkotnak, másrészt mindazon egyszerűen végtelen sok síksor-pár, melyeknek tengelyeik a* $\overline{TT_1}$*-et tartalmazó megfelelő sugársorokat alkotnak, ugyanazt az egy lineáris komplexot határozzák meg. Ez esetben tehát a* $\{TT_1\}^{II}$ *két-*

méretű lineáris sokaság egyméretű lineáris sokaságra: komplexsorra redukálódott.

Ezen $\{TT_1\}^{\mathrm{I}}$ komplexsor minden tagját és pedig mindeniket csak egyszer megkapjuk, ha veszszük a $[T]$ és $[T_1]$ két megfelelő τ és τ_1 síkját, mely a közös $\overline{TT_1}$ egyenest nem tartalmazza; e két síkban levő két megfelelő sugársor elempárjai oly megfelelő síksorok sorozói, melyek mindenike a $\{TT_1\}^{\mathrm{I}}$ komplexsor más tagját határozza meg.

Minthogy pedig a $\tau\tau_1$ egyenes valamennyi komplexben benne van, ezen egyenes a $[T]$ és $[T_1]$ összes síksor-párjait involuczióban metszi és pedig ugyanazon involuczióban, melyet a $[TT_1]$ involutorius síksor metsz ki belőle.

Tehát az itt vizsgált kollineáczió az előbb vizsgált általános esethez képest abból a szempontból is kivételes, hogy az összes síksor-párokat involuczióban metsző egyenesek kétszeresen végtelen sokaságot, lineáris kongruencziát alkotnak. E kongruenczia u és v tengelyei a $[TT_1]$ involutorius síksor duplasíkjaiban vannak és mindenik perspektivitás-tengely az illető síkban levő megfelelő sugársorokra nézve. E tengelyek bármelyikén, például az u-n át tett minden sík a $[T]$ és $[T_1]$ síksorokat teljes involuczióban metszi, melynek tengelye az u, czentruma pedig a v-ből kimetszett pont.

Ha $[a]$ és $[a_1]$ síksor a $[T]$ és $[T_1]$ két megfelelő síksora, úgy ezek képződménye egy hiperboloid alkotósora, melynek minden eleme a rajta levő involuczió duplapontjaiban, illetőleg egy elempárjában metszi az u, v, illetőleg a, a_1 egyeneseket. Vagyis a $[T]$ és $[T_1]$ megfelelő egyeneseit és így magát a T, T_1 pontpárt is az u és v harmonikusan választja el.

Mindezek alapján kimondhatjuk, hogy az u és v tengelyekkel meghatározott térbeli involuczióban a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok megfelelő alakzatok. Ezen involutorius tér bármely két megfelelő síkpontja oly komplexsort határoz meg, melynek specziális komplexei az $|u|$ és $|v|$ sugártengelyek, tehát az önönmaguknak megfelelő síkpontok kivételével ez involutorius tér összes síkpont-párjai ugyanazt a komplexsort határozzák meg.

Az ugyanazon komplexot involuczióban metsző siksor-párok tengelyei a komplexbe bele tartozván, a talált involutorius térben a vele meghatározott komplexek mindenike önönmagának felel meg.

*

Az eddigiekben oly speczialis esetet vizsgáltunk, melynél a kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat a tér tetszőleges síkjai félinvoluczióban metszették, csakis az u és v tengelyek síkjai metszették valódi involuczióban.

Ennek kiegészitésére vizsgálnunk kell, lehetséges-e a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok között olynemű kollineáczió, hogy a tér síkjai általában teljes involucziót messenek ki belőlük?

Mivel pedig a síkbeli involuczió czentrális kollineáczió, első sorban azt vizsgáljuk, mily feltételek mellett metszik a tér síkjai általában perspektiv egyesitett sugársikokban a kollineár $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat?

Ez esetben a metsző π síkban van egy egyenes, a perspektivitás tengelye, melynek minden pontja önönmagának felel meg. Mivel pedig általában a tér minden síkjában egy ily egyenes van, ezek egy első osztályú kongruencziát alkotnak; és mivel a tér tetszőleges pontján át általában egy ily egyenes sem halad át, e kongruenczia nulladrendű.

Első osztályú, nulladrendű kongruenczia a sugársík. Vagyis a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok összes megfelelő egyenesei egy σ sík pontjaiban találkoznak: tehát perspektivek, a közös $[TT_1]$ síksor minden síkja önönmagának felel meg.

Ez esetben a kivételesség abban nyilvánul, hogy a $\{TT_1\}^{\text{II}}$ kétméretű komplexsokaság minden tagja speczialis.

E speczialis komplexok tengelyei egy sugárpontot alkotnak, melynek O czentrumát a T és T_1 pontok harmonikusan választják el a σ siktól.

Ezen O pont minden síkja teljes involuczióban metszi a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat, mert ezeknek bármely két a és a_1 megfelelő egyenese harmonikusan választja el O pontot a σ siktól.

Még itt is rámutatunk azon körülményre, hogy a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok ez esetben megfelelő alakzatai azon térbeli czentrális involucziónak, melynek alapsíkja σ sík és czentruma az O pont. Könnyen belátható, hogy ezen involuczió bármely két nem egyesített megfelelő síkpontja a specziális komplexoknak ugyanazon kétméretű lineáris sokaságát határozza meg.

Visszatérve a kiindulásul vett kérdésre, lehetséges-e a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontok között olynemű kollineáczió, hogy a tér tetszőleges síkjával való metszetük általában teljes involuczió legyen, azt látjuk, hogy ennek egy szükséges feltétele a két kollineár síkpont perspektiv helyzete.

Ha már most a tetszőleges π sík a $[T]$ és $[T_1]$ síkpontokat involuczióban metszi, mivel ezen involuczió tengelye a $\overline{\sigma\pi}$ egyenes és czentruma a $(\overline{TT_1}\pi)$ pont, kell, hogy ezeket az a és a_1 megfelelő egyenesektől kimetszett $(a\pi)$ és $(a_1\pi)$ pontok harmonikusan válaszszák el. Mivel pedig e két utóbbi pontot összekötő egyenes az $[aa_1]$ és π síkok metszésvonala és mint ilyen az $[aa_1]$ sík bármely egyenese, kell, hogy az a, $\overline{TT_1}$, a_1 és $|\sigma[aa_1]|$ egyeneseket síkjuknak bármely egyenese harmonikus kettős-pontpárban messe, mi csak úgy lehet, ha e négy egyenes is harmonikus kettős-sugárpárt alkot, tehát els sorban egy sugársorba tartozik.

De ha T és T_1 egymástól különbözik, ez lehetetlen.

Vagyis *a tér összes síkjai akkor és csak akkor metszik a kollineár* $[T]$ *és* $[T_1]$ *síkpontokat involuczióban, ha ezeknek közös czentrumuk van és egymással involucziót alkotnak.*

Ez utóbbi esetben a megfelelő síksorokat involuczióban metsző egyenesek — a mennyiben az önönmaguknak megfelelő síksorokat, mint kivételeseket, figyelmen kivül hagyjuk — egyetlen speczíális lineáris komplexet alkotnak.

Skopál István.

GRÓF TELEKI SÁMUEL LEVELEZÉSE KÜLFÖLDI MATHEMATIKUSOKKAL.*

A) Bernouilli János és Gróf Teleki Sámuel levelezése.

I.

Vir Celeberrime!

Superatis tandem feliciter suscepti itineris molestiis circa medium Augusti salvus et incolumis per Dei Gratiam Hollandiæ fines salutavi, ubi mihi in studiorum rationem magis magisque inquirenti aliæ plane cogitationes subiere animum, que consilium Lugduni Batavorum commorandi mutarunt, meamque determinarunt voluntatem ut illud temporis spatium quod in his oris transigere mihi constitui in Trajectina hacce

---

* Gróf Teleki Sámuel (sz. 1739, mh. 1822, erdélyi kanczellár, a marosvásárhelyi Teleki-könyvtár alapitója) 1760 elejétől kezdve negyedfél éven át Baselben, Utrechtben és Párisban igen különböző tudományokkal foglalkozott. Úti naplójában (Gróf Teleki Sámuel erdélyi kanczellár úti naplója 1759—1763, sajtó alá rendezte ifj. Biás István, a bevezetést irta Dr. Imre Sándor, Marosvásárhelyt, 1908) különösen hálás elismeréssel emlékezik meg (II.) Bernoulli Jánosról, kitől 17 hónapon át hallgatott privát-kollégiumot a mathematikából, és Bernoulli Dánielről, kitől három hónapon át hallgatott privát-kollégiumot a mechanikából.

Az itt közölt levelek legnagyobb részt e tanulmányút második feléből valók, csak kevés későbbi keletű.

A tudósok leveleinek eredetije, valamint a gróf leveleinek fogalmazványa (esetleg másolata) a Teleki-könyvtárban őriztetik. Teleki levelei, mint a szövegből látszik, csak részben maradtak reánk. A leveleket Gulyás Károly, a könyvtár őre, rendezte sajtó alá.

Gróf Teleki Sámuel ő excellentiája, titkos tanácsos úr, szivessége lehetővé tette, hogy a kiszedett szöveget itt Budapesten az értékes kéziratokból javíthattam ki. Kötelességemnek ismerem ezért e helyen hálás köszönetemet kifejezni. A helyesirásnak (különösen az ékezésnek) következetlenségeit, melyeket a levelekben találtam, meghagytam. *Kürschák.*

Musarum Palæstra consecrarem studiis. Caussa autem mutationis Consilii præcipua fuit, provecta jam ac multis infirmitatibus laborans ætas, incertaque admodum valetudo, Cel. D. Müssenbröeckii; Verebar enim ne ipso fatis humanis functo vel saltem Viribus magis destituto spe omni exciderem, nec vanus hic fuit metus, hodie quippe annunciatum est. Tum vix quatuor dies ægrotum heri supremum obiisse diem. Habet autem hæc Academia Trajectina suum Wesselingium Celeberrimum, quem pro magna qua pollet eruditione sua quotidie docentem jucundum mihi est audire.

C. D. Professor Hahn explicat elementa Physicæ experimentaliter, quem unum si excipias neminem certe hic Studii Matheseos amatorem aut cultorem propter ipsum Matheseos Professorem invenies, quin imo ita hic Juventutis ab hoc scientiarum genere abhorret animus ut ipse Prof. Math. D. Castellioneus in tanta studiosorum frequentia nullos fere habere dicatur auditores, unde merito dixeris his hominibus diversam plane ab aliorum inditam esse naturam. At quid ita de meis in Mathesi Studiis ad Te Præceptorem optimum scribam? nescio, præter quam quod horis privatis ea quæ me sapienter docuisti summa cum delectatione revoco, at multa certe ex iis fugiunt memoriam, nec est modo qui erranti mihi Viam monstret. Gratias Tibi ago maximas pro Litteris quibus me Cel. D. Weiss commendassi, gratæ admodum Tuæ Litteræ ipsi fuere, me quoque excepit humaniter; Inveni cum Ruri in amœnis hortis duobus ab urbe Leyda stadiis degentem, quem frustra antea Hagæ Comitum ac in urbe ipsa quaesiveram. Velis carissimæ tuæ familiæ plurimam meo nomine salutem impertiri. Vale Vir Celeberrime neque porro etiam tuis complectere favoribus

Nominis tui Celeberrimi

Trajecti ad Rhenum 21a Sept. 1761. Cultorem devinctissimum

Sam. Com. Teleki.

II.

Monsieur,

Vous voulés bien que je me serve de la langue françoise dans la quelle vous savés que je suis accoutumé à écrire mes lettres, pour répondre à celle que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire et qui m'est une marque bien précieuse du souvenir dont vous m'honorés.

J'ai été charmé d'apprendre que vous soyés arrivé heuresement en Hollande, je vous souhaite de toute mon ame le même bonheur pour la suite de vos voyages et pour toutes vos entreprises.

La mort de M. Muschenbroeck est une grande perte pour la Republique des lettres en général; c'en est aussi une pour vous, Monsieur, en particulier qui n'auriés pas manqué de retirer beaucoup de fruit de ses Conversations, si vous l'aviés trouvé en vie et en bonne santé. Il est bien glorieux à sa mémoire que la nouvelle de sa maladie vous ait fait abandonner le dessein que vous aviés fait d'aller passer quelque tems à Leyde.

Si M. le Professeur Hahn se souvient encore de m' avoir vu ici à Bâle, je vous prierai, Monsieur, de vouloir bien lui faire mes Compliments lorsque vous aurés occasion de le voir.

Quelque amitié qu'ait pour moi M. le Professeur Weis je n'ai pas la présomption de prendre sur mon compte, l'accueil dont vous vous loués de sa part et qui certainement n'auroit pas été different, quand même vous ne lui auriés point apporté de mes lettres; vous ne devés pas douter, Monsieur, que par tout où vous voudrés bien vous présenter on ne s'empresse à vous faire tout l'accueil que vous mérités.

Ma Femme et mes Enfants sont infiniment sensibles à l'honneur de vôtre souvenir et me prient de vous offrir leurs plus humbles respects; agréés que je vous assure aussi du devouement le plus respectueux avec lequel j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Bâle ce 8. 8-bre 1761. Vôtre très humble et
très obéissant serviteur J. Bernoulli.

III.

Monsieur!

Il y a déjà long tems que Vous m'avez honoré de Votre reponse. Ce petit retardement pour Vous en remercier, n'est qu'un effet de la crainte, que j'ai de Vous incommoder, en Vous ecrivant souvent. Si j'avois suivi mon inclimation: Vouz auriez du, Monsieur, prendre la peine de m'ecrire chaque jour de Poste, car je n'aurois pas laissé échaper aucune occasion de Vous assurer de l'affection et du respet le plus sincère que j'ai pour Vous. Ces pensées sont les plus justes du monde, et j'ai toujours une grande satisfaction de Vous en faire connôitre la Vérité. Je prens la liberté de Vous ecrire en françois; mais j'avoüe que si Vous ne m'aviez pas repondu en françois, j'aurois encore préferé la mere à la fille. Je suis encore trop foible dans mes expressions, A Vous Monsieur, possedez cette langue en perfection, ce qui Vous pourroit bien donner de dégoût. J'espere pourtant que Vous ne regarderez pas tout à mes fautes qu'à mes sentiments. Je me plais assez bien dans ce Pays; une chose que je regrette beaucoup, ayant quitté Bâle, est de m'avoir privé en même tems de

Votre agréable conversation, et des avantages dont j'aurois pu jouir encore auprès des plus grands maitres dans les Mathematiques. C'est Vous, à qui je reconnois devoir les lumieres que j'y ai. Ici je m'applique aussi à la Phisique et je sens combien l'usage des Mathematiques est necessaire, pour decouvrir la sagesse de la nature, pour en pénétrir le secret dont la connoissence semble être cachée aux lumieres de l'homme; c'est la Vérité seule qu'on cherche, qu'on sonhaite d'aprofondir et dont la certitude peut donner une joie constant et veritable. Permettez moi, Monsieur, par cette occasion d'assurer Madame Votre Epouse de mes trés humbles civilités, et de faire mes complimens à Monsieur Votre fils. Je Vous prie de Vouloir agréer que je puisse reparer la perte que je fais eloigné de Vous, par des Lettres. C'est le seul moyen qui peut me procurer quelques consolations, quoique ce ne soit pas tout ce que je sonhaite. J'ai l'honneur d'etre toute mas vie

Monsieur

Utrecht le 24e fevrier 1762.

Votre très humble et très affectionné serviteur
Samuel Comte Teleki.

IV.

Monsieur,

Vous me connoissés trop bien pour pouvoir douter du plaisir que me font les lettres dont vous voulés bien m'honorer; et comment pourroient elles n'avoir pas pour moi un charme infini, gracieuses commes elles sont et ramplies d'assurances les plus affectueuses, que je n'ai garde de prendre pour de simples complimens. Daignés, Monsieur, me conserver des sentimens si précieux que je mérite en quelque façon par le prix que je leur donne et par le désir le plus sincère de les mériter de plus en plus.

Je ne me répens point de la liberté que j'ai prise de vous répondre en françois quoique vous m'eussiés écrit en latin, puisque cela vous a donné occasion de me faire voir les progrés que vous avés faits dans cette langue qui sont étonnants pour n'avoir jamais été en France. Permettés, Monsieur, que je vous conseille à cette occasion, de quitter autant que cela sera faisable la correspondance latine pour la françoise; il n'est pas à craindre que vous oubliiés le latin, au lieu qu'on ne sauroit trop se fortifier dans une langue qu'on a apprise nouvellement et qui s'oublie bientôt pour peu qu'on la neglige, d'ailleurs le stile épistolaire demande une certaine aisance qui ne s'acquiert que par un grand usage.

Vous faites très bien, Monsieur, de ne vous en pas tenir aux connoissances que vous avés acquises dans les mathematiques pures. Cette science ne présente à nôtre esprit que des vérites trop séches et trop stériles pour le satisfaire tout à fait; c'est pourquoi ces vérités ne doivent servir que de moyens pour en découvrir d'autres plus utiles et plus agréables en étudiant la Nature; je ne doute pas qu'ayant autant d'application que vous en avés vous n'alliés bien loin dans cette étude.

Nous eumes la satisfaction ces jours passés de revoir ici M. Kendefi très bien portant; il nous a fait espérer que nous aurions l'honneur de vous revoir aussi avant la fin de l'année; je souhaite, qu' il ne nous ait pas flatté d'une vaine espérance. Si, comme je l'espère, ma maison alors n'est pas toute occupée et que les circonstances le permettent, je vous offrirai de tout mon cœur le logement et ma table telle quelle est pourvu que vous vouliés bien vous en contenter; je suppose, comme M. Kendefi nous en a flatté, que vous voudrés bien nous accorder quelques mois de séjour et vous voyés bien que je voudrois tirer de vôtre séjour dans nôtre ville le plus de parti qu'il me seroit possible.

Ma femme est très flattée, Monsieur, de l'honneur de vôtre souvenir et me charge de vous présenter ses obéissances. Mon fils vous prie aussi d'agréer ses très humbles respects.

J'ai l'honneur d'être avec le devouement le plus sincère et le plus respectueux

Monsieur

Bâle ce 22. mars 1762. Vôtre très humble et très obéissant serviteur J. Bernoulli.

V.

Monsieur,

Je venois précisement de cacheter une lettre pour M. de la Condamine lorsque je reçois celle que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire du 1. de ce mois; cela m'engagea a rouvrir la mienne pour parler de vous à mon ami; cela n'empèche pas que je n'en joigne ici une autre qui puisse vous servir d'Introducteur auprés de M. de la Condamine, puisque vôtre modestie vous fait assés d'illusion pour vous faire croire que vous ayés bésoin d'Introducteur. Je ne sais, Monsieur, si vous arriverés à Paris avant les vacances qui commencent au mois de septembre; si vous y arrivés plus tard vous risquerés de ne le pas trouver à Paris, cependant il y reviendra pour la rentrée de l'Academie au mois de 9-bre et ainsi vous ne laisserés pas de le voir encore puisque vous comptés de passer l'hyver à Paris et vous pouvés être persuadé qu'il vous fera l'accueil que vous mérités. Vous savés au reste qu'il est fort sourd et que pour se faire mieux entendre il faut approcher un peu la bouche de son oreille, vous pouvés mettre en lui une entière confiance et certainement elle ne sera pas trompée.

Je vous remercie très humblement des marques de bienveillance que vous continués à me donner dans vôtre lettre; je vous prie de croire qu' elles me sont toujours également précieuses et que c'est toujours avec le même attachement respectueux que j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Bâle le 10. aoust 1762. Votre très humble et très obéissant serviteur J. Bernoulli.

VI.

Monsieur,

Quoique les lettres dont vous m'honorés de tems en tems soient de ces choses qui me font le plus de plaisir, je serois cependant très mortifié que vous vous génassiés le moins du monde pour me donner plus souvent cette satisfaction. Je suis trop heureux de savoir que vous m'accordés toujours quelque part en vôtre souvenir et je crois pouvoir m'en flatter indépendamment des assurances que vous avés la bonté de m'en donner.

J'entrevois par ce que vous me faites l'honneur de me dire, Monsieur, que vous trouvés que ce n'est pas à Bâle que vous avés le plus mal employé vôtre tems; cela est bien flatteur pour les personnes avec qui vous avés bien voulu le passer dans nôtre ville; je souhaite de tout mon cœur que cette considération vous engage à y venir encore passer quelque mois en quittant Paris, nous tâcherions de vous faire regagner le tems que vous croyés avoir perdu en Hollande.

Je n'ai jamais douté, Monsieur, de l'accueil que vous feroit M. de la Condamine; j'en aurois été persuadé quand même je n' aurois pas connu sa façon de recevoir tout le monde; cependant je lui entiens le même compte que si ce n'étoit pas une simple justice qu'il vous rendit, oserois-je vous prier, Monsieur, de lui faire mille compliments de ma part et de lui demander par manière de conversation s'il songe encore à nous.

J'ai l'honneur d'être avec le dévouement le plus respecteux

Monsieur

Bâle ce 11. janv. 1763. Vôtre très humble et très obéissant serviteur J. Bernoulli.

Ma femme me charge Monsieur, de vous présenter ses obéissances; agréés aussi les très humbles respects de mon fils.

VII.

Monsieur!

De retour de mes Voyages, je me crois obligé de Vous donner quelque signe de Vie et de Vous assurer de mes sentiments toujours remplis de respect et d'amitié pour Vous. Prenez-vous en, je Vous prie, à mes affaires multipliées si ces sentimens sont demeurés si long tems sans expression. Ils n'en sont pas moins sinceres.

Pendant le sejour que j'ai fait à Viennes depuis le Commencement du mois de Juin jusqu'à la fin d'Octobre je n'aurois pas manque Monsieur de Vous donner de mes nouvelles si elles avoient pu vous interesser, mais elles étoient trop seches pour Vous etre mandées. Etant à la Cour, toutes mes occupations se reduisoient à jouer le role de Courtisan. Plus repandu que jamais dans le grand monde par mon état et par mon devoir, je pensois devenir de mechant Geometre bon Courtisan.

Mais enfin n'ayant pas toutes les qualites requises pour y reussir j'al quitté la Cour pour revenir sur mes terres et pour y vivre en particulier dans une retraite obscure. Un severe dessin m'attache à ma Patrie malheureuse, il faut souffrir avec elle. Vincendaque omnis fortuna ferendo est.

Ce n'est que depuis le 15e Decembre que y suis de retour et je ne puis pas dire encore absolument que j'y sois établi. Des visites continuelles et des petits voyages sans fin m'ont empeché jusqu'ici d'y fixer ma demeure. J'espere que dans quelques mois d'ici j'én viendrai à bout, et que je pourrai ensuite employer mon tems plus utiliment. En attendant je lis les Elements de Wolf et Analyse du Marquis de l'Hopital, pour me mettre un peu en train. Outre mes études de Mathematiques je travaille encore à une nouvelle edition d'un Poëte Latin du XVe Siecle qui est fort estimé et dont on n'à pas encore donné une edition complette.

Oserois je Vous charger Monsieur de faire agréer mes compliments très humbles à Madame et à Mr De Marechal et d'assurer Monsieur d'Annone de mon Amitié. Je ne manquerai pas de luy envoyer des Mineraux de ce Pays, si se puis trouver quelque occasion.

Vous me ferez un grand plaisir, Monsieur, de me donner des nouvelles de Monsieur Votre fils ainé.

Milles choses obligeant se Vous prie de ma part, à Madame. J'ai l'honneur d'etre avec un sincere dévouement et un attachement inviolable

Monsr.

Sard 4e Avril 1764.

Votre très humble et très affectionné serviteur
Sam. C. Teleki.

VIII.

Monsieur,

La lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire le 4 du mois passé m' à causé un plaisir bien sensible ; non seulement elle me fait voir que le tems, ni l'éloignement n'ont point alteré les sentiments dont vous m'honoriés, maïs je la regarde en même tems comme une preuve de la justice que vous me rendes de croire que je m'interesse et m'interessai toujours bien vivement à tout ce qui vous regarde puisque vous daignés m'en rendre quelque compte.

Je ne suis nullement surpris, Monsieur, que vous ayés si bien joué le rolle de Courtisan pendant vôtre séjour à Vienne ; non seulement parceque vous êtes sur de réussir en tout ce à quoi vous voulés donner quelque application, mais principalement parce qu'il vous est tout à fait naturel de vous faire aimer et rechercher de tout le monde des petits et des grands. C'est donc par choix et par une sage reflexion que vous préferés la vie douce et tranquille du Philosophe aux honneur bruyants et tumultueux de la Cour ; puissiés vous, Monsieur, gouter cette tranquillité en parfaite santé pendant un grand nombre d'années et puisse la Republique des lettres cueillir en abondance les fruits de vos travaux et de vos méditations!

Je trouve que vous faites fort bien de prévenir le dégout en mettant un peu de variété dans vos occupations et en relevant la sècheresse de la Géometrie par l'agrément des meilleurs poëtes latins ; je me flatte quand la nouvelle édition à laquelle vous travaillés sera achevée, que je serai aussi du nombre de ceux à qui vous en destinés un exemplaire, le cas que j'en ferai me donne quelque droit d'y prétendre.

Vous nous avés fait espérer, Monsieur, que vous engageriés quelques uns de Mrs. vos Compatriotes à visiter nôtre université, les trouvés vous disposés à suivre vôtre conseil et vôtre exemple? Si vous pouviés nous en envoyer qui vous ressemblassent, je les attendrois avec bien de l'impatience et je leur offrirois avec plaisir d'avance ma maison et ma table supposé que les circonstances me permissent de les recevoir lorsqu'ils arriveroient à Bâle.

Permettes moi, Monsieur, de présenter ici mes très humbles respects à M. le Comte Joseph votre n'eveu, qui travaille sans doute avec succés à vous donner des petits neveux, et à M. le Comte Kendefi.

J'ai fait vos Compliments à M. et à Me. de Marechal ; ils y ont été fort sensibles et m'ont chargé de vous faire les leurs ; M. le Docteur d'Annone m'a aussi prié de vous présenter ses très humbles obéissances et remercimens de vôtre souvenir, de même que ma femme.

Mon ainé, dont vous avés la bonté Monsieur, de me demander des nouvelles, après avoir heureusement terminé son voyage par la France, la Hollande et l'Allemange est arrivé en parfaite santé à Berlin au mois de 9-bre dernier et a reçu le plus gracieux accueil du Roi des Russes et de tous les grands; il a été reçu membre ordinaire l'Academie des Sciences et paroit content de son sort. Le second de mes fils se trouve le mieux du monde à Genève où il est depuis 9 mois; les trois autres sont à Bâle et se portent fort bien quant à présent, je dis *quant à présent* parce qu'il est à présumer que le tout petit ne se portera plus si bien dans quelques semaines d'ici, puisque nous nous proposons de le faire inoculer un de ces jours. Je vous ferois mes excuses sur tous ces petits détails, si jétois moins persuadé des sentimens que vous avés pour toute ma famille. J'ai l'honneur d'être avec un très respectueux devounement

Monsieur

Bâle ce 1. mai 1764. Votre très humble et très obéissant serviteur J. Bernoulli.

Je cachette ma lettre de noir pour la mort de ma mère, décédée il y a un mois à l'âge de 91 ans.

P. S. J'oublois de vous repondre sur l'article de mon avanture de Londres. Ce que vous avés vu dans la gazettes d'Amsterdam et de France est exactement vrai mais n'etoit pas fait pour etre rendu public et l'est devenu contre mon attention. Le juge de police qui m'envoya ches moi deux émissaires est un homme decrié. Jai vu une requête signée de tous ses confreres au grand chancelier d'Angleterre pour le prier au nom et pour l'honneur de leur corps de lui oter sa commission. Il a essuyi une condamnation fletrissante dans un tribunal public. Je n'ai cependant pas encore nouvelle de sa déposition quoi qu'on m'ait ecrit de Londres qu'elle etoit prochaine. On m'a detourné de suivre cette affaire comme j'y etois résolu et de le prendre a partie. Notri resident et ministre plenipotenciaire qui y etoit de mon tems dans l'intervalle des deux ambassadeurs est devenu fou. J'ai sous-laissé là.

L'arret du parlament qui defend d'inoculer dans les villes et les faubourgs de sa jurisdiction sur un faux exposé n'empêche pas les progrès de cette methode. La faculté de medecine le gardera bien de rendre un decret qui la couvriroit de honte et de ridicule aux jeux de l'Europe. Les ennemis de cette pratique ont par provision ce qu'ils pretendoient par les entraves qu'il ont mis a l'operation qui ne peut plus etre pratiquée que par des gens aisés. J'ai commencé une lettre sur cette matiere que d'autres affaire m'ont empeché jusqu' ici d'achever et de publier.

IX.

Monsieur,

Quoiquil y ait assés longtems que je n'ai eu le bonheur de recèvoir des vos nouvelles par vous même, je n'ai pas laissé d'en apprendre de tems en tems par des voyes indirectes; car comme personne ne s'enteresse plus vivement que moi à tout ce qui vous regarde; je profite soigneusement de toutes les occasions qui se présentent de m'en informer. Plût à Dieu, Monsieur, que j'eusse encore avant de mourrir la douce satisfaction d'en apprendre de vôtre propre bouche et que l'envie vous prit de revenir voir nôtre bonne ville. Partout où vous serés vous êtes bien assuré de vivre avec des Personnes qui vous aiment, vous estiment et vous respectent infiniment, mais je doute qu'il y ait un endroit au monde où vôtre mérite soit plus généralement reconnu qu'à Bâle; faites moi la grace est la justice, Monsieur le Comte, de me mettre à la tête de ceux à qui ces sentimens sont les plus naturels et soyés bien persuadé du plaisir que je prendrai à vous en donner toutes les preuves possibles dans la Personne de M. Comte de Bethlen vôtre Parent, que vous me faites l'honneur de me recommander et qui d'ailleurs me paroit se recommander assés lui même par l'agrément de sa Personne, la douceur de son caractère et les qualités de l'esprit et du cœur. Il me fera donc le plus grand plaisir du monde de s'adresser à moi avec une entière confiance dans toutes les occasions où je pourrai lui être bon à quelque chose.

Je vous rens bien des graces, Monsieur, de l'honneur que vous faites à mon fils de vous en souvenir et il sera certainement très flatté de l'apprendre; il est toujours à Berlin dans l'Academie des Sciences, et depuis quelque tems en qualité d'astronome observateur; je'n ai eu depuis peu de fort bonnes nouvelles, il me fait même espérer qu'il viendra me rendre une visite au commencement du mois prochain, si comme il l'espère, il en peut avoir l'agrément du Roy et s'il ne se présente proint d'autre obstacle.

Je finis en vous réiterant de tout mon cœur tant à vous, Monsieur, qu'à tous ceux pour qui vous vous interessés les offres de tous les services qui peuvent dépendre de moi et les assurances des sentimens les plus respectueux et les plus sincères avec lesquels j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Bâle ce VI. 7-bre 1765. Vôtre trés humble et

très obéissant serviteur J. Bernoulli.

X.

Monsieur !

Il faut étre malheureux autant que je le suis pour manquez au moindre des devoirs d'une amitié aussi chere que la Votre et il n'y a que la rigueur d'un sort si triste que le mien qui puisse justifier un si long silence.

Ma mauvaise fortune, et le tissu de mes adversités me fournissent des excuses beaucoup meilleurs que je ne voudrois ; cependant, malgre l'envie que j'ai de justifier mon silence auprès de Vous, ma situation ne permet pas que je les fasse valoir. Le droit du plus fort étant toujours le meilleur, un malheureux risqueroit beaucoup de dire qu'il à raison ; et puisque je ne saurois me plaindre impunement dumal qu'on m'à fait, je me suis condamné à un silence perpetuel sour tout ce qui regarde ma cause. Je vous prie même Monsieur, que si Vous en avez quelque connoissance par des voges indirectes ne touchez pas cette corde dans la lettre que Vous me ferez l'honneur de m'ecrire pour m'apprendre de Vous cheres nouvelles. Je fais la même prière à Mons^r^ Votre frere.

Par les mêmes raisons qui m'ont empeché de Vous écrire, je ne Vous saurois rien mander d'interessant, et qui peût meriter Votre attention touchant mes Etudes ; elles sont troublées aussi bien que mon esprit.

Il me reste donc, Monsieur, de Vous recommander un de mes parents Mons^r^ le Comte de Bethlen, qui aura l'honneur de Vous rendre cette lettre. La Celebrité de Votre nom, et les bontés que Vous m'avez temoigné pendant que j'ai eu le bonheur d'etre guidé par Vos lumieres lui fait aspirer à la gloire d'etre au nombre de Vos éleves. J'éspere qu'il se rendre digne de cet honneur, et de celui de Votre amitié. Vous m'obligerez, Monsieur, infiniment si Vous lui faites sentir que les choses qui me sont cheres, ne Vous sont pas indifferentes. Les bons offices que Vous lui rendrez augmenteront, s'il est possible, le zele particulier que j'ai de Vous temoigner en toute occasion combien je suis avec un attachement sincere.

Monsieur

Sard ce 7^e^ Aout 1768.

Votre tres humble et tres obéissant serviteur
Samuel Com. Teleki.

Je serois charmé Monsieur d'apprendre de nouvelles de Monsieur Votre fils. Je vous prie de l'assurer de mon amitié.

XI.

Monsieur !

La lettre que vous m'avés fait l'honneur de m'écrire le 7e d'aoust et que je n'ai réçûe que depuis peu, me fournit une nouvelle preuve de la confiance dont vous m'honnorés en me recommendant M. le Cte Rhédey. M. Fogarasi m'avoit déja prévenu fort favorablement sur le mérite de ce jeune Cavalier; mais le témoignage qui vous lui rendés et vôtre recommendation, Monsieur, achevent de m'en donner la plus avantageuse idée et vous ne sauriés douter sans me faire la plus grande injustice que je ne fasse pour lui absolument tout ce qui sera en mon pouvoir pendant le séjour quil fera à Bâle.

J'apprens avec bien du plaisir la résolution qu'on a prise d'établir chés vous une société d'Agriculture et d'arts; je ne suis point supris qu'on veuille que Vous en soyés; sur qui jetteroit on les jeux pour de pareils établissemens si ce n'est sur vous Monsieur. Connoissant la bonté de vôtre Caractère et vôtre amour pour la Patrie, je ne doute pas que Vous ne Vous soyés laissé persuader sans peine. Il est vrai qu'on rencontre bien plus de difficultés et dégouts en jettant les premiers fondement d'un ouvrage et qu'on avance bien plus lentement qu'après qu'il a été conduit à un certain point; mais c'est à cause de ces difficultés mêmes qu'on en a plus de mérite et qu'on se montre meilleur Citoyen; ajoutés, Monsieur, que le service que Vous rendrés par la à Vôtre Patrie sera un moyen bien efficace de Vous rendre de plus en plus agréable à S. M. l'Imperatrice Reine, ce qui doit être et qui est sans doute dans Vôtre esprit un motif bien pressant.

Vous avés bien de la bonté, Monsieur le Comte, de Vous souvenir encore de mon fils de Berlin; je ne manqueroi pas de lui en rendre compte et il en sera extrèmement flatté. Puisque Vous paroissés prendre quelque interét à ce qui le regarde, il est juste que je Vous en donne des nouvelles un peu circonstanciées. Il y a passé un an qu'ayant obtenu du Roi la permission de nous rendre une visite, il étoit déjà arrivé à Mannheim lorsqu'il se laissa persuader de profiter d'une bonne compagnie pour faire un tour en Angleterre où il n'avoit jamais été. Il passa donc l'hyver et le printems à Londres et s'arrêta ensuite un mois à Paris où il observa le passage de Venus, enfin il arriva ici au mois de juin et pendant le sèjour qu'il fit chés nous il eut occasion de faire connoissance avec une demoiselle fort aimable et de beaucoup de mérite; l'envie lui prit d'en faire sa femme et il l'a epousée; quinze jour après ses noces, c'est a dire, vers le milieu de septembre il repartit avec sa jeune épouse pour Berlin où ils sont arrivés fort heureusement et où j'ai la satisfaction d'apprendre que ma Bru est généralement goutée.

Au reste, Monsieur, je me recommande à la continuation de cette bienveillane qui m'est prétieuse et dont vous me donnés toujours de nouvelles preuves, agréés, s'il Vous plait, les sentimens les plus respectueux avec lesquels j'ai l'honneur d'être

Monsieur

Bâle ce 22 de X-bre 1769. Vôtre très humbles et très obéissant serviteur J. Bernoulli.

Je Vous dois bien des excuses, Monsieur, de n'avoir pas eu l'honneur de répondre le lettre, que M. Fogarasi m'a remise de Vôtre part; outre que j'ai été fort occupé, comme je le suis encore, je comptois tous les jour voir arrivér ici M. le C^{te} Rhédey et je voulois attendre son arrivée pour avoir l'honneur en même tems de Vous en dire quelques mots. Je dois les mêmes excuses à Monsieur le C^{te} Joseph Teleki; oserois je Vous prier Monsieur de les lui faire agréer lorsque Vous le verrés où lui écrirés; comme j'ignore, s'il est à Vienne ou en Transsylvanie je ne saurois où lui adresser ma lettre; présentés lui je Vous prie mes très humbles respects et assurés le bien que toutes les Personnes qu'il me recommendera ne sauroient être mieux recommendées auprès de moi.

B) Bernouilli Daniel és Gróf Teleki Sámuel levelezése.

I.

Vir Celeberrime!

Iter, quod Lugdunum Batavorum susceperam, miraberis forte quo fato in hanc me deduxerit Academiam, et certe errore quodam me huc delatum fuisse, at deliberato tandem consilio meorum hic constituisse studiorum sedem merito credas; quibus autem hoc factum fuerit rationibus ex Litteris ad Fratrem Tuum amantissimum datis intelligere poteris, eas enim hic iterare superfluum plane tibique molestum fore duxi. In studio jam ab aliquo tempore in hac Academia incumbere cœpi; in Mathematicis, privato tantum studio Ingenium exerceo, præfulgente mihi Luce illa, quam non ab aliis sed a vobis summis hujus seculi Mathematicis acceptam mihi gratulor, at multa se offerunt mihi obscura in quo omnes licet ingenii intendam vires penetrare tamen nequeo.

Inter alia exceperam Calamo in Collegiis Tuis Privatis Theorema quoddam in Hugenianum, de determinanda altitudine lapsus Corporis intra datum tempus libere cadentis, et etiam longitudine penduli certo tempore oscillantis, cujus demonstrationem ab Hugeniana diversam, promissam quidem propter angustias tempore dare tibi tunc non licuit.

Theorema est: Ut se habet quadratum Diametri Circuli, ad Dimidium quadratum peripheriae, ita longitudo fili penduli simplicis intra datum tempus vibrantis, ad altitudinem per quam Corpus tempore dato libere cadit. Assumseramus quidem tuo et aliorum experimento altitudinem lapsus Corporis intra secundum libere cadentis $15' + 1''$, fili penduli longitudinem vero ad quævis secunda vibrantis $3' + 8\frac{4}{7}''$. sed cum hæc a posteriori per experimenta tantum constent, jucundius mihi multo foret si per calculum a te determinata mihi constarent; tuæ enim Resolutiones Demonstrationes et evidentia et universalitate præ aliorum de se commendant.

Nec mirare Vir Celeberrime, me eo devenisse audaciæ, ut te altiora indagantem talia quærerem, tuo enim in me favore fretus tuaque venia id facio, prosertim cum Te sciam nulla ex re majorem capere delectationem quam si aliis utilis esse quæas. Vale Vir Celeberrime mihique fave.

Tui Nominis Celeberrimi

Cultori perpetuo

Trajecti ad Rh. 1761 21 Sept. Sam. Com. Teleki.

II.

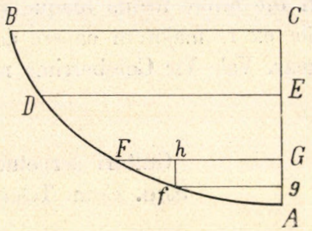
Illustrissime Domine Comes.

Accepi litteras perquam honorificas easdemque gratissimas quas ad me dare dignatus es. Gratulor Tibi, Illustrissime Domine Comes, iter in Bataviam feliciter confectum reditumque in Patriam atque prosperum ex animo apprecor: mihi vero gratulor atque gaudeo constantem animi tui in me affectum.

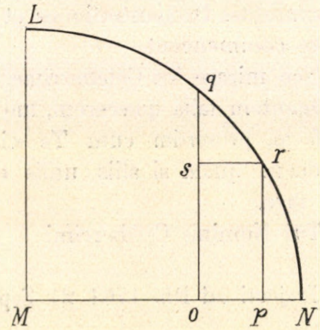
Magna porro cum voluntata intelligo ex Litteris tuis, studia mathematica etiam num Tibi in deliciis esse. Theorema cujus mentionem facis, demonstratum videbis in Hugenii horologio oscillatorio: Loquitur ille de cycloidicis potius oscillationibus, quam de circularibus; nec enim hae profecte sunt inter se isochronæ, si modo majores modo minores ponantur oscillationes. At si oscillationes perquam parvæ considerentur, non different ad sensum oscillationis circulares ab oscillationibus in cycloide; quæ radium osculi in puncto infimo æqualem habeat radio circuli dati. Igitur de cycloide demonstrabo theorema, quantum potero breviter.

Lemmate utar sequente cujus demonstrationem in lectionibus nostris privatis me dedisse puto. Si corpus a quiete descendat super curva qualicunque, habebit in singulis punctis velocitatem eandem, quam acquireret cadende verticaliter ab eadem altitudine: Igitur si altitudo lapsus verticalis fuerit y et gravitas naturalis exprimatur per unitatem, erit velocitas acquisita generaliter $= \sqrt{2y}$.

Sit jam ADB semicyclois cujus circuli generatoris diameter AC putetur verticalis et $= \frac{1}{2} a$, ita ut radius osculi pro puncto A fiat $=a$, qua longitudo a postmodum indicabit longitudinem penduli oscillationes minimas circulares facientis. Ducantur reliquæ lineæ quas figura indicat satisque explicat. Incipiat corpus descendere ex puncto quali-



1. ábra.



2. ábra.

cumque D puteturque pervenisse in punctum F et erit velocitas in puncto F

$$= \sqrt{2EG}:$$

tempusculum in descensum per Ff insumtum

$$= \frac{Ff}{\sqrt{2EG}}$$

et tempus insumtum in descensum per arcum DF

$$= \int \frac{Ff}{\sqrt{2EG}}.$$

Sit nunc Arcus $AD = b$; Arcus $AF = s$, erit per proprietates cycloidis $AE = \frac{bb}{2a}$ et $AG = \frac{ss}{2a}$; hinc $EG = \frac{bb-ss}{2a}$; ergo tempusculum per Ff

$$= \frac{-ds\sqrt{2a}}{\sqrt{2(bb-ss)}} = \frac{-ds\sqrt{a}}{\sqrt{(bb-ss)}},$$

cujus integrale dabit tempus insumtum in decensum per DF: pendet autem istud integrale a rectificatione circuli et determinatur sequenti modo.

Fiat quadrans circuli LN, cujus radius $MN = AD = b$; fiat $Mo = s$, $op = ds$, $qo = \sqrt{(bb-ss)}$; habetur ex natura circuli elementum

$$qr = \frac{b\,ds}{\sqrt{(bb-ss)}}$$

et

$$Lq = \int \frac{b\,ds}{\sqrt{(bb-ss)}} = z,$$

ergo

$$\frac{-z\sqrt{a}}{b} = \int \frac{-ds\sqrt{a}}{\sqrt{(bb-ss)}}$$

$=$ (per antecedentia) tempori insumto in decensum per arcum DF, si modo debita addatur constans C; unde tempus istud quesitum erit

$$= C - \frac{z\sqrt{a}}{b}.$$

Constans C determinatur ex eo, quod si sumatur in priori figura $AF = AD$ vel $s = b$ ac proinde in figura secunda $Mo = MN$, tempus debeat esse $= 0$; fit autem tunc $z = LN =$ quadranti circuli, cujus radius $= b$; si igitur ponatur radius ad quadrantem ut 1 ad n, erit $LN = nb$; unde ad cognoscendam constantem C oportet facere $C - \frac{nb\sqrt{a}}{b}$ vel $C - n\sqrt{a} = 0$, id est, $C = n\sqrt{a}$; fit igitur venum tempus insumtum in descensum per DF

$$= C - \frac{z\sqrt{a}}{b} = n\sqrt{a} - \frac{z\sqrt{a}}{b}.$$

Ergo tempus descensus per integrum arcum DA habebitur si ponatur $AF = s = 0$; sed in figura secunda si sit $s = Mo = 0$ erit etiam $Lq = z = 0$; igitur tempus integri descensus per DA fit simpliciter $= n\sqrt{a} = \frac{n\sqrt{2a}}{\sqrt{2}}$. Jam vero $\sqrt{2a}$ nihil aliud est quam tempus quod corpus insanit in lapsum verticalem per altitudinem a, quod si indicetur per t, erit tempus descensus super arcu cyclidico $DA = \frac{nt}{\sqrt{2}}$. Exinde jam patet præfatum tempus plane non pendere a magnitudine arcus AD, quia nempe littera b nihil afficit quantitatem $\frac{nt}{\sqrt{2}}$: unde constat isochronismus, qui competit curvæ cyclidicæ eamque post tot alias insignes proprietates tam commendabilem reddit.

Ponatur jam arcus DA minimus ita ut haberi possit pro arcu circulari cujus radius $= a$ et erit tempus semioscillationis circularis $= \frac{nt}{\sqrt{2}}$ atque tempus oscillationis integræ $= nt\sqrt{2}$. Est igitur tempus oscillationis in pendulo, cujus longitudo a ad tempus lapsus verticalis per eandem longitudinem vel altitudinem a ut $nt\sqrt{2}$ ad t velut $n\sqrt{2}$ ad 1. Si jam tempus lapsus et tempus oscillationis idem esse debet et queratur ratio inter altitudinem lapsus et longitudinem pendulis isochroni, erit hoc modo procedendum. Sit longitudo penduli qualiscunque $= a$, altitudo lapsus isochroni $= x$; erit tempus altitudinis lapsus $= \sqrt{2x}$ et tempus oscillationis penduli $= 2n\sqrt{a}$)nam supra vidimus esse tempus semioscillationis $= n\sqrt{a}$, et consequenter tempus oscillationis integræ $= 2n\sqrt{a}$) hinc $\sqrt{2x} = 2n\sqrt{a}$ et $x = 2nna$. Ergo $a : x = 1 : 2nn = 4 : 8nn$, id est ut quadratum diametri ad dimidium quadrati peripheræ, quia $4n$ denotat peripheriam circuli cuius radius $= 1$. Q. E. D.

Habes igitur, Vir Illustrissime, demonstrationem quam a me petiisti Quod si quædam Tibi videantur minus perspicua, id arduitati argumenti adscribes, rogoque ut hanc epistolam Parisiis coram amico meo, Domino Clairaut, Geometra longe Eruditissimo legas, qui omnem tibi serupulum eximet, nisi aliquis alter istud officii genus Trajecti facere possit. At vero interprete non indigebis, si modo ea, quam argumentum requirit, animi attentione demonstrationem ruminari velis. Quod superest, vale Illustrissime Domine Comes et favere perge

Illustrissimi Nominis Tui

Basileæ d. 8. 8-bris 1761. Cultori Obsequiosissimo

Danieli Bernoulli.

III.

Celeberrime Vir!

Gratæ mihi vehementer tuæ litteræ fuerunt, quas XVI aute Calend. Novembris accepi. Te valere, meque a Te amari, Tibi gratulor, mihique gaudeo. Magni facio tuum in me studium, quod cum longe a Te absim, per litteras longe suavissimas, in me ornando ac crudiendo ponis. Epistolam Tuam legi atque etiam relegi, non ut Epistolam, sed ut libros soleo; magnamque voluptatem ex Tua Demonstratione Theorematis Hugeniani, de longitudine fili penduli, aut altitudine lapsus determinanda percepi; ingeniosa illa ac perspicua est, suoque digna auctore; gratias tibi ago maximas quod me quoque ea dignum existimaveris. Cupio sane a Te doceri, et amo ea quæ a Te proficiscuntur. Hinc est ut quoties scribendi ad Te occasio mihi datur, temperare mihi non possim quin docendi Tibi negotium facessam; Tua propter ea in me humanitas animum ad hoc agendum erigit. Scilicet: inter leges gravitatis præcipua est, atque scitu non minus utilissima, quam jucundissima: Quod ejusdem corporis pondera in diversis a centro telluris distantiis, sunt in ratione inversa quadratorum distantiarum. Hujus Demonstrationem didici, ex ea Hypothesi petitam, qua Vis gravitatis repræsentatur lineis rectis ex centro terræ in omnes plagas exeuntibus et funiculorum instar corpora versus idem centrum attrahentibus quæ cum ex eodem centro ductæ divergant: corpoia quoque eadem ut pro ratione distantiaıum plus minusve attrahant necesse est; quemadmodum hoc determinatur tandem ex hac hypothesi. Sed ni fallor idem obtinet in hac hypothesi, quod in vorticibus Cartesii, Bülfingeri et materia gravifica Hugenii, quod, nempe: sequeretur Vim gravitatis seu attractionis fore in ratione superficierum, non massorum; quod cum minime sit: Rogo ut dum plus otii nactus fueris, hujus Theorematis demonstrationem more Tuo elaboratum dare non dedignare.

Vides Vir Celeberrime, quam sit molestum non nunque amicorum precibus se facilem præbere; solent enim eæ esse frequentes et eo frequentiores existunt quo plus habent fiduciæ. Ego sane qui Tibi semper devinctus esse studeo, libenter me adduci patior ut Te subinde studiorum meorum caussa interpellem; immo: eam in me sentio discendi a Te cupiditatem, ut vix in posterum etiam ab hujusmodi Epistolis tutus eris, nisi Mechanicam aliquam sæpius jam a Te efflagitatum in manus nobis dederis, et in ea Demonstrationes Tuas rerum saltem sublimiorum complexus fueris, quæ frustra alibi tam concinnae tamque perspicuæ queruntur. Non immemores hujus beneficii nos habebis; nec officium tuum apud bonos in orbe erudito Viros intermoriturum existimo. Vale Celeberrime Vir, studiisque meis fave, et me porro etiam ama

Celeberrimi Tui nominis

Dabam Trajecti Batavorum — Cultorem perpetuum

IV. ante calend Martii MDCCLXII. — C. Sam. Teleki.

IV.

Bâle ce 22 mars 1762.

Monsieur,

J'ai reçu la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire; je prends la liberté d'y repondre en françois; mais j'espere que vous continuerez avec moi de vous servir de la langue qui vous sera la plus familiere, d'autant plus que l'élégance, la precision et la pureté de votre diction latine ne sauroient manquer de charmer pour peu qu'on y soit sensible.

Je suis bien aise, Monsieur, que vous ayez été content de ma demonstration du theoreme de Huguens. Je tachois, en la couchant par ecrit, d'être clair: mais je contois beaucoup plus sur votre intelligence que sur mes enoncés. Comment aurois-je été en etat de demontrer un des theoremes les plus difficiles en mecaniques sur deux mois de leçons, que javois eu l'honneur de vous donner, si vous n'y aviez supplée par vous meme. Je vois de plus, que depuis que vous avez quitté Bâle vous avez fait par vous meme des progrès considerables dans les mathematiques. Ne vous arretez pas, mon cher et Illustre Comte, en si beau chemin et ne vous bornez pas à connoitre les mathematiques; tachez encore de les enrichir.

La propriété des pesanteurs reciproquement proportionelles aux quarrés des distances n'apartient pas seulement au sisteme de la terre, mais à tout les corps celectes: c'est une verité certaine, que tous les phenomenes confirment et demontrent avec une evidence entiere, mais qu'il eut été impossible de voir *à priori*. Les vrais philosophes n'entreprendront jamais de demonstrer cette proprieté, qui est bien plutôt du ressort de la metaphysique que de celui des mathematiques, je la regarde simplement comme un moyen que le Createur d l'univers a employé, d'une maniere inintelligible à l'homme, pour arriver au but qu'il s'etoit proposé lors de la creation du monde. C'est une loy generale prescrite à la matiere d'avoir une tendance mutuelle à s'aprocher et que cette tendance diminue en raison quarrée des distances augmentées. Le moindre element de la terre se fait ressentir sur chaque element materiel, dans quel endroit du monde qu'il se trouve et la meme chose est vraie à l'egard de tout autre element materiel; les phenomènes qu'on determine exactement dans le cours des astres, dans leurs inegalités et leurs perturbations ne nous laissent pas douter de la chose; le flux et reflux de la mer confirme en particulier ce principe à l'egard de l'attraction que la matière de la lune et celle du soleil exercent sur les eaux de la mer. Je vous exhorte par avance de mepriser les vains efforts, qu'on fera dans le monde pour demonstrer une telle propriété et de n'ecouter là dessus jamais que la Philosophie des Anglois. Je me suis formé me espece de demonstration de l'immaterialité de la cause primitive de l'attraction universelle. Tout mouvement relatif que vous puissier supposer dans la matière tend necessairement à eloigner les parties; meme deux corps qui s'approchent d'abord arrivent aussi tot à l'etat de s'eloigner l'un de l'autre, la matière se dissiperoit donc et ne pourroit être renfermé dans les limites, s'il n'y avoit que matière et mouvement sans ausure force qui retint la matière dans de certaines limites. Cette force reside dans la matière, de meme que l'inertie, mais elle ne sauroit etre produite par aucenne action mecanique d'une autre matière, puisque se seroit manifestement une petition de principe. Il semble que le monde subsiste tel qu'il est par l'equilibre qu'il y a entre la tendance, qui resulte du mouvement, à se fuir et entre l'attraction universelle inprimée à la matière par l'efficace de la volonté du Createur. Tout cela doit vous faire peu d'impression. mais avec le tems vous l'envisagerez tout autrement. Au reste on pourroit rependre à votre argument *qué la pesanteur devroit ètre en raison des surfaces et non des masses* en disant que la matière subtile qui cause la pesanteur passe avec une liberté presque entière l'assemblage grossier des molecules et qu'elle n'agit que sur les elements solides qui composent le corps et dont le nombre determine la masse du corps.

Il n'y a pas longtems que nous avons vu ici M. Kendeffy; mais il ne s'est arreté à Bâle que pendant 4 ou 5 jours. Ne repasserez vous par aussi par Bâle à votre retour? Je serois charmé d'avoir encor une fois l'honneur de Vous voir. Je viens de recevoir une lettre de Mr le Comte Joseph Teleky; elle est datée de Vienne où il me marque qu'il se trouve pour des affaires de famille. Il me fait aussi l'honneur de m'aprendre le jour des ses nopces; c'est le 18 d'avril. Au reste il se plaint d'être eunor à attendre une reponse de moi sur la penultieme. Cependant jai eu l'honneur de lui ecrire à Hermannstadt par Vienne, il y a 5 ou 6 semaines; peutetre recevra-t-il encore ma lettre; si vous lui ecrivez, Monsieur, je vous suplie de lui presenter mes respects, de lui marquer ce que je viens de dire et que j'attendrai une reponse à ma dernière pour ne pas donner le tems aux lettres de se croiser.

J'ai l'honneur d'être avec un respectueux attachement,

Monsieur

Votre très humble et très obéissant serviteur

Daniel Bernoulli.

V.

Monsieur,

Je n'ai qu'un moment devant moi pour avoir l'honneur de repondre à la lettre que Vous m'avez fait celui de m'ecrire. Quand Vous serez à Paris, Vous me ferez un sensible plaisir d'aller saluer de ma part M. Clairaut, le meilleur de mes amis; il demeure rue du Coq près la rue de la Verrerie; s'il n'a pas le tems de vous donner, Monsieur, des leçons reglées dans les matematiques, que vous aimez tant, je suis sûr de moins, qu'il se fera un plaisir de Vous assister de ses conseils et de Vous indiquer d'autres moyens. Ayez la bonté aussi de lui dire, que jai reçu ses nouvelles reflexions sur le sujet de la contestation qui c'est élevée entre lui et M. D'Alembert, mais je lui repondrai moi même aussitôt que je serai debarassé de quelques affaires qui m'occupent actuellement. Peut être que ma reponse lui parviendra avant votre arrivée à Paris et en ce cas vous la trouverez tout prevenu et si ma lettre n'arrive qu'aprez coup, Vous n'aurez, Monsieur, qu' à lui faire la lecture de ce peu de lignes et Vous verrez que cela fera le même effet, qu' une lettre de recommendation dans les formes. Je crois que mon frere vous a envoyé une lettre pour M. de la Condamine; je vous prie de lui dire aussi un mot pour moi. Si Vous me faites l'honneur, Monsieur, de m'ecrire depuis Paris, Vous me ferez un tres sensible plaisir de me donner des nouvelles de Mr le Comte Joseph. Est il actuellement marié ? Il semble que l'irregularité des postes a interrompu notre commerce, car je compte trop sur ses bontés et sur son amitié pour craindre d'en être oublié. Oserois je vous prier de lui faire parvenir mes sentimens pour lui, toujours remplis de respect et de devouement et les voeux que je fais pour sa conservation et sa prosperité.

L'arithmetique universelle de Mr Newton, illustrée par les notes de Mr Castiglioni et l'introduction de Mr Muschenbrock à la Philosophie naturelle sont des ouvrages qui meritoient bien une nouvelle et plus ample edition.

J'ai l'honneur d'être toujours avec le plus respectueux attachement.

Monsieur

Bâle ce 10. aoust 1762. Votre très humbles es très obéissant serviteur Daniel Bernoulli.

VI.

Monsieur,

C'est avec un tres sensible plaisir, que j'ai apris Votre heureuse arrivée à Paris. Comme Vous aurez sans donte destiné un certain tems à Vos voyages, je suis faché, que Vous en ayez perdu une si grande partie en Hollande, car il me semble que Vous n'etes pos trop content de ce pays. J'espere, Monsieur, que Vous Vous dedommagerez bien vite à Paris, qui est le centre des sciences et des arts. Vous m'avez fait beaucoup de plaisir d'y aller voir d'abord Mr Clairaut; je me flatte, que cet Illustre Savant, qui me fait l'honneur d'etre de mes intimes amis, fera tout ce qui dependra de lui pour Vous rendre utile et agreable le tems que Vous passerez à Paris. Il doit etre fort liè avec Mr de La Lande, tres grand Astronome; si Vous etes donc resolu d'apprendre l'astronomie, il me semble que Vous ne pourriez mieux faire, que de Vous adresser à Mr de La Lande; mais peutetre n'aura t-il pas le tems de donner des leçons dans les formes. En ce cas Vous pourriez en demander à Monsr le Monnier l'astronome. Quoiqu'il en soit, consultez sur cet article Mr Clairaut, qui pourra Vous donner de beaucoup meilleurs avis que moi. J'espere, Monsieur, que Vous aurez vu aussi Mr de la Condamine. Personne n'est plus en etat que lui de Vous donner des eclaircissemens sur les brouilleries singuliers que j'ai avec M. D'Alembert. Mr le Comte Joseph a eu la bonté de prendre mon parti, meme jusqu' à se charger lui meme de ma defense: je ne scai si cette defense paroitra bientot: peutetre que Mr de la Condamine, qui est en liaison avec Mr le Comte Joseph, pouvra Vous le dire. Ces demelés ne me tiennent pas à cœur, du moins pour ce qu'ils ont de literaire; mais la conduite que M. D'Alambert a eue avec moi me paroit tout a fait indecente et je m'en suis plaint à l'Academie. Voila tout ce qui s'est passé de mon coté. Au reste quoique Mr Dalambert soit un savant homme, on peut dire quil est bien neuf sur les matieres qui font proprement le sujet de nos demelés. Il y a fort longtems que je n'ai point recu de nouvelles de Mr de la Condamine; il m'est revenu aussi qu'il n'etoit pas present à l'Academie, lorsqu'on y a lu mes plaintes. Par contre j'ai devant moi deux lettres de Mr Clairaut, aux quelles je n'ai pas encore repondu, j'y repondrai le plutot qui il me sera possible. En attendant je Vous prie de faire mille complimens de ma part à ces deux Messieurs. Ne ferez vous pas, Monsieur, l'emplette de quelques nouvelles lunettes, que Mr Clairaut a inventées avec toute cette sagacité qui lui est naturelle. Vous nous avez fait esperer qu'a Votre retour a Vienne, Vous passeriez par Bale; mon frere et moi serions bien charmés, si Vous etiez encor dans ces idées. Je Vous prierai en ce cas de demander a Mr Clairaut un morceau de ce cristal d'Angleterre qui fait la base des nouvelles lunettes par sa proprieté de disperser les rayons de differentes couleurs avec beaucoup plus de force que le verre ordinaire sans differer sensiblement en vertu refringente moyenne. Nous avons ici un ouvrier qui sous mon inspection saura bien à ce que j'espere, mettre en execution les regles et proportions exposées par Mr Clairaut. Nous avons eu ici un froid piquant et non interrompu depuis le 25 9bre de l'année passée; le vent a toujours soufflé entre l'Est et le nord el le barometre a toujours eté au dessus de 24 pouees qui font la hauteur moyenne pour l'endroit où je demeure et le thermometre à environ 9 ou 10 degrès suivant la division de Mr de Reaumur, ce n'est pas tant l'intensité du froid que sa longue durée qui est extraordinaire; car le thermometre de Mr de Reaumurs est descendu dans d'autres années jusqu'à 14d au dessous de la congelation. Mon frere me dit qu'il a eu l'honneur de Vous ecrire il y a 3 ou 4 jours et dans ce moment il m'envoye le billet ci joint qu'il Vous prie de faire tenir a Monsr de la Condamine. Si vous ecrivez à Monsr le Comte Joseph, je vous prie de lui presenter mes respects et de recommander à la continuation de sa bienveuillance et de son amitié. J'ai l'honneur d'etre avec tous les sentimens de respect et d'attechement.

Monsieur

Bâle ce 14. janvier 1763. Votre tres humble et tres obéissant serviteur Daniel Bernoulli.

VII.

Monsieur!

C'est une chose bien embarrassante que de se remettre à son devoir, quand on a failli si long tems; sour tout contre une personne qui l'on a tant d'obligations que je Vous en ai. Cependant si j'ai différé jusque ici à Vous écrire, j'en ai une meilleure excuse que je ne voudrois. C'est de n'avoir rien trouvé dans mes études et dans le changement de mon état qui eût valu la peine de Vous etre mandé. Á l'heure même que je Vous écris cette excuse pouvant avoir lieu, je ne sais si je dois m'en prévaloir pour obtenir pardon de mon silence; ou bien si je dois chercher plutôt à justifier auprès de Vous la liberté que je prens de Vous ecrire sans pouvoir Vous intretenir sur des sujets dignes de Votre attention. Il seroit juste que je fisse l'un et l'autre si je ne craignois pas de Vous ennuyer par une longue Apologie.

J'ai fait un séjour de cinq mois à Vienne pendant lequel tout mon tems se passoit à faire ma Cour et à rendre des Visites. On me faisoit éspérer quelque charge à la Cour, mais au fond on ne me payoit que de belles paroles. Après avoir sondé les cœurs et fait une tentative, je me suis bien apperçu qu'il n'y avoit rien à gagner, à moins que d'etre de la Religion à la mode. Je m'en consolerai aisement si je puis trouver du bonheur dans une vie obscure solitaire. D'ailleurs c'est un plaisir pour moi que de voir tout de beaux Genies plus brillants que le mien augmenter l'éclât du Trône.

J'ai donc quitté Vienne sur la fin d'octobre, et je suis de retour dans mon pays depuis le 15e Decembre.

Me voila, Monsieur, hors du centre des sciences et des arts, dans un pays malheureux où l'on n'entend pas seulement parler de ces choses-là ! Cependant quelque grand que soit ce changement de pays, il n'en a point apporté dans mon goût pour les Mathematiques. Les moments que je puis employer de tems en tems à les cultiver me sont toujurs bien précieux. Dès que j'aurai mis quelque ordre à mes affaires, et que j'aurai fini ces visites fatigantes que je dois rendre de tous cotés après une absence de presque quatre ans et demi ; je me fixerai dans un coin retire de la Transilvanie et je rependrai le fil des mes etudes, pour me rapeller mes anciennes idées.

J'éspère de trouver ensuite plus de facilité à faire quelque progrès dans la Carriere des Sciences. Car je n'en ai pas encore tout-à-fait desésperé, quoiqu'en effet j'aye déjà beaucoup negligé et que mon esprit se soit presque enrouillé (s'il est permis de m'exprimer ainsi) pour avoir languis pendant dix mois dans l'inaction, J'ai même la vanité, Monsieur, de vouloir aspircr un jour à la gloire de defendre Votre Cause ; et de repondre à la critique indirecte qui à été faite de Votre Hydrodinamique par Monsieur D'Alembert. Le parti seroit fort inégal si je n'avois pas quelque avantage sur lui dans la bonté de Votre Cause. Vous savez cependant, Monsieur, quod Caussa etiam justa male agitata perit. Ainsi pour éviter que mon zéle pour Votre reputation ne Vous fasse quelque tort, je Vous supplie de vouloir bien me donner des eclaircissement necessaires la-dessus et me faire part de Vos savantes reflexions touchant la Dynamique de Votre adversaire. J'en ferai le meilleure usage que je pourroi suivant vos ordres.

Heureux si ma capacité repond à mon zéle pour vous convaincre par des preuves réelles et non equivoques du respect et de l'attachemant sincere avec les quels je suis et serai toute ma vie

Monsieur

Sard ce 3e Avril 1764.

Votre très humble
et très-affectionné serviteur
C. Sam. Teleki.

VIII.

Monsieur,

On ne sauroit etre plus sensible que je le suis à l'honneur de Votre souvenir, dont Vous me donnez toujours des marques pleine de bonté. Je chevirai et respecterai Votre illustre nom tant que je vivrai et parmi tant de titres qui m'inspirent ces sentimens celui de vos merites personnels me touche encor plus que tout les autres. La Cour de Vienne est abondante en gens de la plus haute qualité ; j'espere que votre merite en percera la foule, laissez le agir tranquillement; le tems viendra que la cour vous recherche. En attendant contentez Vous d'etre à la tete des bons citoyens et de figurer dans les Etats de Votre Patrie par cette elevation de cœur et d'esprit qui vous est si propre pendant que les charges de la Cour ne feront jamais que troubler votre repos et accumuler vos besoins. Vous Vous plaignez, Monsieur, d'etre hors du centre des sciences et des arts. J'espere cependant que Vous n'en serez que plus en état d'etendre leurs limites s Vous trouverez toutes les ressources en vous meme; vous avez d'ailleure une bibliotheque choisie sans parler du grand livre de la nature ouvert à tout le monde; c'est particulierement ce grand ouvrage quil faut etudier et il vous instruira plus que ne pourroient faire toutes les Academies des sciences et des arts: Enfin Vous vivez avec Mons^{r} le Comte Joseph, qui joint à toutes ses autres qualités celle de Philosophe et de mathematicien. Il me semble que Vous etes à peu prés d'une force egale; je voudrois que Vous missiez un peu d'emulation dans votre commere, que vous vous proposissiez des problemes et que Vous discutassiez ensemble les difficultés qui vous arretent. car il ne faut pas marcher toujours sur le velours mais tacher de franchir tous les obstacles. Oserois-je vous prier, Monsieur, de presenter a Mons^{r} Votre Neveu mes honneurs et respectueux devouement. La perte qu'il a faite de Madame sa Mere m'à touché vifement, par ce que je scai toute la tendresse qui il a eue pour cette illustre et digne mere. La mienne est morte il y a deux mois, mais agée de 91 ans: je ne l'en ai pas moins regrettée; il faut se soumettre avec resignation à la volonté de Dieu et adorer sa Providence. Veuille ce grand Dieu repandre ses plus pretieuses benedictions sur toute Votre noble et respectable famille.

Je ne scai, Monsieur, si M^{r} D'Alambert quoique savant du premier ordre est digne d'etre refusé par un savant de votre qualité ni si je suis digne d'un tel apologiste. Si cependant vous croyiez que vous puissiez le faire sans vous degrader, la premiere chose à faire à chaque nouveau pas seroit d'examiner si mon antogoniste agit avec bonne foy: car c'est une homme tellement rongé par l'envie et l'ambition, que souvent il prete un faux sens à autruis, aprez quoi il fait semblant de resoudre la question et s'attribue l'honneur de la premiere invention. Dans plusieurs endroits, où la théorie pure etoit tres facile mais où les obstacles pouvoient enlever les 99 centiemes du total, je m'etois proposé de soumettre au calcul ces obstacles; j'en suis venu à bout avec beaucoups d'exactitude et jai confirmé ma theorie par des experiences à la fin de chaque section; sur quoi M. Dalambert resout la question sans faire mention des obstacles; trouve un tout autre resultat et se donne de grands airs; s'il ne m'a pas refuté sans me lire, il faut qu'il soit le plus mechant homme de la terre. Je n'ai pu souffrir l'aspect de sa dynamique et hydrodynamique dans ma petite bibliothece; je m'en suis donc defait et je serois hors d'etat de faire autre chose que de mettre les propositions de mon hydrodynamique au dessus de toute chicane. Avez vous trouvé, Monsieur, sa demonstration sur la composition des puissances beaucoup plus claire et plus succincte que la mienne? je n'ai pas seulement examiné la sienne, qui ne comprend que la moitié de la question, mais je doute si vous avez les memoires de Petersbourg où se trouve ma demonstration. J'ai l'honneur d'etre avec tous les seutimens du plus respectueux devouement,

Monsieur

Bale ce 7. may 1764. Votre tres humbles et tres obéissant serviteur Daniel Bernoulli.

IX.

Monsieur!

J'espere que Vous vondrez bien agréer les excuses que je Vous fais de ne Vous avoir pas écrir si long tems. Elles sont beaucoup meilleurs que je ne voudrois. C'est l'effet de ma méchante fortune et d'une infinité d'adversités que mes sentimens de respect et d'amitié pour Vous sont demeurés si long tems sans expression; ils n'en sont pas moins sinceres, ni moins vifs. Vous meleriez, Monsieur, vos harmes avec les miennes si j'osois Vous faire le recit de tout ce qui m'est arrivé de facheux pendant cet éspace de tems. Mes avantures sont bien tristes et rudes au de la de tout ce que Vous pouvez Vous imaginer. On eu pourroit faire une tragedie bien touchante, dont je serois malheuresement le Heros. La situation ou je me trouve ne permet pas que j'entre en detail là-dessus, d'autant plus que ce seroit peut etre un crime que de dire que j'ai raison, quoique dans le fonds je n'aye pas tort.

Je brise donc là dessus et malgré l'envie que j'ai de Vous apprendre ma triste situation, je me borne Monsieur, à Vous recomander celui qui aura l'honneur de Vous remettre cette lettre. Il est mon parent, et fils du Président du Bane Royal de justice de ce pays. La Celebrité de Votre nom qui au travers des tenebres dont ce pays est couvert, à pénetré jusque dans le fonds de la Transilvanie, l'attire dans Votre Academie. Son Pere a bien voulu satisfaire l'inclination qu'il à pour les sciences et m'a prié de Vous le recommender, etant très persuadé de la part que Vous me faites l'honneur de m'accorder en Votre amitié. J'y trouve de la gloire, et je le fais avec d'autant plus de plaisir que je crois lui rendre de très bons offices en l'addressant à Vous. Avec la disposition heureuse que je lui connois, j'espere qu'il se rendra digne de Vos soins et de ceux de Monsieur Votre Frere et il pourra profiter de Vos grandes lumieres. Je l'aime trop pour lui envier ce bonheur, mais je voudrois bien en jouir avec lui, quoique peu de gens en connoissent le prix dans ce pays, qu'avec raison on pourroit nommer le tombeau des savans. J'y suis deja enterré tout vif avec le peu de talent que j'ai en. Au reste soyez persuadé Monsieur que ce revers de ma fortune, fût il encore plus grand, n'apportera jamais du changement dans les sentimens de respects avec lesquels je suis.

Monsieur

Sard u 7. d. Avril 1768.

Votre très humble et tres obéissant serviteur
Samuel Comte Teleki.

C) Cairaut levele Gróf Teleki Sámuelnek.

Monsieur,

Vous m'avés fait un sensible plaisir en me donnaut des vos nouvelles, et vous ne devés gueres en douter après celui que vous m'avés toujours vû prendre dans votre compagnie pendant votre sejour à Paris. J'aurois eté faché d'etre obligé de penser que l'amitié que vous m'aviés temoignée etoit un meuble de voyage usé avant d'arriver chez vous. Je l'aurois eté aussi pour les Mathematiques que votre gout pour elles n'eut point de suites. Vous me rassurés à tous ces egards et j'y suis tres sensible. Je serai donc tres charmé d'apprendre de tems en tems de vos nouvelles et de celles des vos etudes si vos occupations vous permettent de les continuer.

Mlle Gouly a eté flattée de voutre souvenir ainsi que Messieurs du Sejour. Ils sont charmés de savoir que vous etes en bonne santé et tous mes autres amis qui ont eut l'honneur de vous voir l'ont appris aussi avec bien du plaisir. Vous n'aves donc où M. Fernu que peu du tems j'en suis faché car son commerce vous auroit purement plû beaucoup et vous auroit confirmé dans votre gout pour l'Astronomie. Il y a bien longtems que je n'ai eu des ses nouvelles, le ne m'attend plus à en recevoir que de Stockholm.

Vous ne me dites rien de M. Le Comte Joseph, Vous en etiés apparemment trop eloigné pour en savoir des nouvelles. J'imagire que vous m'en etes pas fort loin presentement et que vous pourées vous ex l'un l'autre à continuer l'étude des Mathematiques, et à penser quelquefois à un mathematicien qui est avec les seutimens de la plus grande estime et du grand respect

Monsieur

Paris 12. X-bre 1763.

Votre très humble et très obeissant serviteur Clairaut.

D) La Condamine két levele Gróf Teleki Sámuelnek.

I.

Paris 30. avril 1763.

Je suis bien mortifié et peut etre plus que vous Monsieur le Comte du tems qu'il a fait aujourdhui. Vous n'aures rien pu voir à Marly ou vous aurés vu avec beaucoup d'incommodité. J'esperois que vous passeries ce soir ici. Je suis bien mortifié de n'avoir pas mieu profité de votre sejour ici. Vous n'aves pas voulu me mettre à l'épreuve. Jaurois desiré vous etre utile. Vous ne m'aves employé à rien.

Voules vous bien vous charger de ces deux lettres pour M. Bernoullit J'écrirai par la poste a M^r votre neveu a qui je dois reponse. Je vous annoncerai et le livre de M^r D'Alambert quil me prioit de vous engager a lui porter. Oserois-je vous donner une commission a Vienne c'esl d'assurez de mon respect M. Van-Swieten et de le prier d'envoyer a M^r Cassini de Thury une lettre de moi qui l'attend a Vienne. Il est parti sans prendre congé de l'Empereur ni l'imp^e Reine parce qu'il comtois y retourner. Il va envoyer au premier jour la relation de son voyage à leurs Majestée Imperiales. M^r Van-Swieten pourroit envoyer les lettres qui sont restées entre ses mains adressées à cet Academicien dans un paquet pour lui avec une seconde enveloppe a *M. le D. de Choiseul Pair de France* ministre et secretaire d'Etat de la guerre et de la marine.

Je vous souhaite un heureux voyage et je serai en tous lieux et en tous tems des voeux pour votre santé et votre prosperité. Je me recommande a l'honneur de votre souvenir et vous offre mes services de nous quoique vous ne les ayies pas acceptées du moins efficacement jusqu' à present. J'ai l'honneur d'etre avec un respecteux attachement

Monsieur de V. Ex^se

Le tres humble et tres obeissant serviteur
La Condamine.

II.

Au Chateau d'Etouilli près Hamen Picardie le 8. fev. 1764.

Monsieur,

Je suis trop flaté de l'honneur de votre souvenir pour n'etre pas infiniment sensible aux marques obligeantes que vous m'en donnés par votre lettre. Je ne puis regarder que comme une plaisanterie ce que vous me dites de la permission que je vous ai donnée de m'ecrire. Je voudrois pouvoir reconnoitre la faveur que vous me faites par quelque nouvelle qui put vous interesser; mais ma surdité fait que je n'aprens ce qui se passe dans le monde littéraire et politique, que par les gazettes et sourtout dans cette province ou je suis venu trouver Made de la Condamine chès sa mere pour l'amener à Paris, et ou me voici retenu jusqu'au mois de mars. Le mariage de mon neveu et d'autres affaires domestiques m'ont donné beaucoup d'occupation qui ne m'ont pas permit de répondre plustôt a votre lettre et je m'en aquite au premier moment de loisir que je suis venu chercher dans cette solitude. Je suis surpris de l'accueil froid et glacés que vous avec recu de Mr Van Swieten. Je l'ai connu fort poli et fort obligeant il y a près de vingt ans a Leyde, mais il etoit jeune alors et n'etoit pas encore premier medecin de Leurs majestés Imperiales et leur Bibliotecaire. Il vérific le proverbe *honores mutant mores.* Ce changement est n'eanmoins plus recent que ses dignités. Il avoit eu plus dégard a ma recommendation dans une affaire plus délicate. Je lui ecrivis il y a quelque années pour obtenir par son crédit que L'Imperatrice Reine ne s'opposât point a l'elargissement d'un prisonier de la Bastille qui y etoit retenu son prétexte, d'une note injurieuse a la maison d'Autriche dans un ouvrage qu'il avoit publié et j'obtins ce que je demandois. Depuis ce tems jai continué de lui ecrire de tems en tems, je lai même consulté au sujet de mon infirmité et il m'avoit toujours repondu très regulierement et avec beaucoup de politesse, ce qui fait que je suis d'autant plus surpris que vous n'ayiés pas eté content de lui. Il n'a pas répondu a ma lettre ni même a une autre que je lui ai ecrite depuis en lui en adressent une pour M. Cassini mon confrere de l'Academie des Sciences qui etoit alors a Vienne. Peut etre M. de Haën qui a ecrit contre l'inocculation et que jai refuté un peu durement, étant son compatriote et son ami l'a-t-il indisposé contre moi, peutetre est il m'écontant que j'aye eté plus de deux ans sans lui écrire. Quoique il en soit, je vois que nous ne sommes plus bien ensemble. Je m'en consolerait si je ne voyois que cela est peutetre cause de la chicanne qu'il vous a fait fier quelques uns de vos livres que vous n'aves pu retirer de sumains.

Si vous vous proposés de repondre a la critique indirecte qui a eté faite de l'hydrodynamique de M. D. Bernoulli, vous aurés facilement de lui tous les eclaircissemens et tous les secours que vous pouves desirer. Pour moi j'avoue mon insuffisance et que n'ai jamais etudié cette partie. M. D'Alambert a eté voir le Roi de Prussi a Wetzel d'ou il a suivi ce monarque a Berlin. Il y a sejourné deux ou trois mois, et est revenu en France avec une tabatiere dor et une gratification pour son voyage. Il n'a tenu je crois qu'a lui d'etre Pres de l'acad[e] de Berlin cé qu'il n'a point accepté non plus que les offres de la Imperatrice de Russie. On ignore a Berlin qui sera le Successeur de M. de Maupertius. Mad. de la Condamine me charge de vous rendre grace de votre souvenir au quel elle est tres sensible. Si vous avés quelque commission a faire en ce pais ci je vous demande la preference. J'ai l'honneur d'etre avec un respectueux attachement Monsieur

Votre humble et tres obeissant serviteur
La Condamine.

Közli: *Gulyás Károly.*

A VÉGTELEN DETERMINÁNSOK ELMÉLETÉHEZ.[1]

Végtelen lineár egyenletrendszerek megoldásának problémája vezette HILL-t,[2] POINCARÉ-t[3] és HELGE VON KOCH-ot[4] a végtelen determinánsok elméletének a megalapitására. De az eddig ismeretes konvergenczia-kriteriumok a determináns elemeit igen szűk megszorításnak vetik alá. Midőn HILBERT a lineár integrálegyenlet megoldását egy végtelen lineár egyenletrendszer megoldására vezette vissza, általánosabb egyenletrendszerek vizsgálata vált szükségessé; ezeket HILBERT[5] a végtelen sok változós quadratikus és bilineár alakok elméletének felhasználásával oldja meg.[6]

Kétségtelen, hogy a lineár egyenletrendszer megoldását legszebben és legegyszerűbben a determináns-elmélet felhasználásával nyerjük; mivel továbbá a végtelen determinánsok elmélete — miként már KOCH megmutatta és később újabb példákkal igazolni fogom — egyéb problémákban is sikerrel alkal-

---

[1] E dolgozat bölcsészetdoktori értekezésem lenyomata.

[2] G. W. HILL: On the part of the motion etc., Acta Mathematica t. 8, 1886.

[3] H. POINCARÉ: Sur les déterminants d'ordre infini, Bulletin de la Société mathematique de France, t. 14.

[4] H. v. KOCH: Sur une application des determinants infinis etc., Acta Mathematica, t. 15. és Sur les determinants infinis etc., Ibidem, t. 16.

[5] D. HILBERT: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Vierte Mitteilung és Fünfte Mitteilung; Göttinger Nachrichten, 1906.

[6] HILBERT vizsgálatait TOEPLITZ egyszerűsítette és kiegészítette, v. ö. Die JACOBI'sche Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Göttinger Nachrichten 1907, p. 101—109. Még általánosabb lineár egyenletrendszerek megoldását adja ERHARD SCHMIDT e dolgozatában: Über die Auflösung linearer Gleichungen etc., Rendiconti Circ. Matem. Palermo, t. XXV. (1° sem. 1908.)

mazható, azért — úgy vélem — nem végzek fölösleges munkát, ha a végtelen determinánsok elméletét tovább fejlesztem. KOCH azokat a determinánsokat vizsgálja, a melyekben az átlós elemek szorzata, valamint az átlónkívüli elemek összege feltétlenül összetartó. Kimutatja, hogy ezek a determinánsok összetartók és hogy itt is érvényesek maradnak a véges determinánsok fontosabb tulajdonságai; így a szorzás szabálya stb. E vizsgálatokat részletesen kifejti és kibővíti CAZZANIGA.[1]

E dolgozatban a végtelen determinánsok egy általánosabb osztályát vizsgálom, nevezetesen azokat a determinánsokat, a melyekben az átlós elemek szorzata feltétlenül összetartó és az átlónkívüli elemek absolut értékeinek *négyzetösszege* összetartó. Világos, hogy ez az osztály a KOCH által vizsgált determinánsok osztályát nemcsak magában foglalja, hanem jóval tágabb körű. A végtelen sok változós függvény fogalmának felhasználásával sikerül kimutatnom, hogy ebben a tágabb körben is fennmaradnak a véges determinánsok fontosabb tulajdonságai, tehát elsősorban az összetartás, továbbá a szorzás szabálya, a LAPLACE-féle kifejtés stb. A nyert eredményeket alkalmazom végtelen lineár egyenletrendszerek tárgyalására, továbbá a BESSEL-féle függvények elméletére; és alkalmazni szándékom a lineár integrálegyenletekből levezethető végtelen lineár egyenletrendszerekre, továbbá az általános láncztörtek elméletére.[2-3]

---

[1] CAZZANIGA: Sui determinanti d'ordine infinito, Annali di Matematica, (II), t. 26 (1897).

[2] A dolgozat nagy terjedelme miatt a végtelen determinánsok elméletében csak a legszükségesebbre szorítkoztam és némely idevágó kérdésre még visszatérni óhajtok.

[3] E dolgozat tartalma részben érintkezik H. v. KOCH «Sur la convergence des déterminants infinis» czimű a Rendic. Circ. Matem. Palermo 28. kötetében (2^0 sem. 1909) megjelent (v. ö. a 238. old. lábjegyzetét és «Sur un théorème de M. Hilbert» czimű 1910 julius havában a Math. Annalen 69. kötetében megjelent czikkének fejtegetéseivel. Épen ezért felemlítem, hogy e czikk kéziratát a Math. és Phys. Lapok szerkesztősége már 1909 deczember havában vette át és megjelenése csak technikai okokból késlekedett. *Rados Gusztáv.*

1. §. A végtelen determinánsok definicziója; általános tulajdonságaik.

Legyen

$$a_{ik} \qquad {\scriptstyle (i,\,k=-\infty,\ldots,+\infty)}$$

a valós vagy komplex számok egy kétszeresen végtelen sorozata; jelentse továbbá rövidség kedvéért

$$[a_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\,k=-n,\ldots,\,+m)}$$

a következő $m+n+1$-edfokú determinánst:

$$\begin{vmatrix} a_{-n,\,-n} & a_{-n,\,-n+1} & \ldots & a_{-n,\,-1} & a_{-n,\,0} & a_{-n,\,1} & \ldots & a_{-n,\,m} \\ a_{-n+1,\,-n} & a_{-n+1,\,-n+1} & \ldots & a_{n+1,\,-1} & a_{-n+1,\,0} & a_{-n+1,\,1} & \ldots & a_{-n+1,\,m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{1,\,-n} & a_{-1,\,-n+1} & \ldots & a_{-1,\,-1} & a_{-1,\,0} & a_{-1,\,1} & \ldots & a_{-1,\,m} \\ a_{0,\,-n} & a_{0,\,-n+1} & \ldots & a_{0,\,-1} & a_{0,\,0} & a_{0,\,1} & \ldots & a_{0,\,m} \\ a_{1,\,-n} & a_{1,\,-n+1} & \ldots & a_{1,\,-1} & a_{1,\,0} & a_{1,\,1} & \ldots & a_{1,\,m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{m,\,-n} & a_{m,\,-n+1} & \ldots & a_{m,\,-1} & a_{m,\,0} & a_{m,\,1} & \ldots & a_{m,\,m} \end{vmatrix}$$

jelöljük e determináns értékét D_{mn}-nel. Ha $\lim\limits_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} D_{mn}$ létezik és egyenlő D-vel, akkor írjuk, hogy

$$D=[a_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\,k=-\infty,\ldots,\,+\infty)}$$

és végtelen magasrendű determinánsnak vagy röviden *végtelen determináns*-nak nevezzük. Ha $\lim D_{mn}$ véges és meghatározott szám, akkor a végtelen determinánst összetartónak, ellenkező esetben széttartónak nevezzük. Az összetartás szükséges és elegendő feltétele tehát, hogy egy tetszésszerinti kis positiv σ számhoz meg lehessen határozni egy N számot úgy, hogy e reláczió:

$$|D_{m+p,\,n+q}-D_{mn}|<\sigma$$

bármely p és q értékekre fennálljon, ha csak $m>N$ és $n>N$.

Az összetartás egy szükséges feltétele, hogy $\lim\limits_{m=\infty} D_{mm}$ véges és meghatározott szám legyen.

Bevezetjük a következő elnevezéseket:

A D determináns főátlója (vagy röviden átlója) az a_{ii} ($i = -\infty, \ldots, +\infty$) elemek halmaza; *az i-edik sor* az a_{ik} ($k = -\infty, \ldots, +\infty$) elemek halmaza; a *k-adik oszlop* az a_{ik} ($i = -\infty, \ldots, +\infty$) elemek halmaza; az a_{00} elem *a determináns kezdőeleme.*

Az összetartó determinánsok néhány általános tulajdonságát sorolom fel.[1]

Egy összetartó determináns összetartó és változatlan értékű marad, ha kezdőelemül a főátló egy tetszésszerinti elemét választjuk.

Ha egy összetartó determinánsban a sorokat az oszlopokkal felcseréljük úgy, hogy a főátló változatlan marad (más szóval a_{ik} helyébe a_{ki}-t írunk), akkor az új determináns is összetartó és az eredeti determinánssal egyenlő értékű.

Ha egy D értékű determinánsban két sort vagy két oszlopot egymással felcserélünk, akkor az új determináns összetartó és értéke $-D$.

Ha egy determináns két sora vagy két oszlopa egymással megegyezik,[2] akkor a determináns összetartó és értéke zérus. Mert hiszen, ha m és n elég nagy, akkor $D_{mn}=0$, tehát

$$\lim_{\substack{m=\infty\\ n=\infty}} D_{mn} = 0.$$

Ha egy D értékű determináns valamely sorának (oszlopának) minden egyes elemét egy meghatározott K számmal szorozzuk, akkor az új determináns összetartó és értéke KD.

Ha valamely determinánsban egy sor (oszlop) elemei egy másik sor (oszlop) megfelelő elemeitől egy állandó tényezőben különböznek, akkor a determináns összetartó és zérus értékű.

Minden összetartó determinánst, a melyben a sorok és az

---

[1] V. ö. még CAZZANIGA, loc. cit. pp. 151—157.

[2] Azaz, ha van oly i és j érték, a melyek mellett $a_{ik} = a_{jk}$ ($k = -\infty, \ldots, +\infty$), vagy $a_{ki} = a_{kj}$ ($k = -\infty, \ldots, +\infty$).

oszlopok indexei $-\infty$-től $+\infty$-ig haladnak, átalakíthatunk (a negativ indexű sorok és oszlopok áthelyezése által) oly összetartó determinánssá, a melyben az indexek 1-től ∞-ig haladnak.

Ha tehát összetartó determinánsról van szó, akkor azt már ily speczialisabb alakban felírtnak képzelhetjük.

Ha a $\prod_{i=1}^{\infty} \mu_i$ és $\prod_{i=1}^{\infty} \nu_i$ szorzatok összetartók és egy D értékű determináns i-edik sorát μ_i-vel, i-edik oszlopát ν_i-vel szorozzuk, akkor az új determináns összetartó és értéke $D' = D \prod_{i=1}^{\infty} (\mu_i \nu_i)$.

Ha $x_1, x_2, \ldots$ a számok egy végtelen sorozata, a melyek mindegyike a zérustól különböző és ha a

$$D = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

determináns összetartó, akkor az

$$[a_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

determináns is összetartó és értéke szintén D.

Mert hiszen

$$[a_{ik}] = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

És hasonlóan következik e tétel:

Ha valamely összetartó determináns sorait szorozzuk és oszlopait osztjuk rendre az x_i számokkal, akkor a determináns összetartó és változatlan értékű marad.

Ha valamely összetartó determinánsban az egyik sor (oszlop) elemeit egy megadott számmal szorozva egy másik sor (oszlop) elemeihez rendre hozzáadjuk, akkor a determináns összetartó marad és értéke ugyanaz, mint az eredetié.

Mert legyen a megadott determináns

$$D = [a_{ik}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)\ [1]$$

---

[1] E determinánst néha így is jelölöm: $[a_{ik}]_1^\infty$.

akkor összetartásának a feltétele, hogy $\lim_{m=\infty} D_m$ létezzék, a hol

$$D_m = [a_{ik}] \qquad (i, k=1, 2, \ldots, m)$$

és most, ha az új determináns D', akkor valamely m-től kezdve $D'_m = D_m +$ egy zérus értékű determináns; tehát

$$\lim_{m=\infty} D'_m = \lim_{m=\infty} D_m = D.$$

2. §. Normális determinánsok; konvergenczia-kriterium.

Koch a determinánst normálisnak nevezi, ha az átlós elemek szorzata feltétlenül összetartó és az átlónkívüli elemek kétszeresen végtelen összege feltétlenül összetartó. A determinánsok ezen osztálya fontos tulajdonságokkal bír, a mennyiben Koch kimutatja, hogy minden normális determináns összetartó,[1] hogy egy sor elemei szerint kifejthető, hogy két normális determináns szorzata ismét normális stb.

Én vizsgálataimat a determinánsok egy általánosabb osztályán végzem. Ugyanis megtartom azt a föltételt, hogy az átlós elemek szorzata feltétlenül összetartó legyen, de ezen kívül csak azt teszem föl, hogy az átlónkívüli elemek absolut értékeinek *négyzetösszege* legyen összetartó; az ily determinánst *tágabb értelemben normális*-nak, *vagy* — mivel a következőkben ily determinánsokról lesz főképpen szó — röviden *normális*-nak[2] fogjuk nevezni; ezzel szemben a Koch által vizsgált determinánsokat *szűkebb értelemben normális* determinánsoknak nevezhetjük.

Ebben a §-ban a következő tételt bizonyítom be:

Minden normális determináns összetartó. (I)

---

[1] Abban a speciális esetben, ha $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, e tételt már Poincaré bizonyította be idézett helyen.

[2] Ezt az elnevezést a következő fejtegetések indokolják, a mennyiben kitűnik, hogy ezek a determinánsok éppen oly egyszerű tulajdonságokkal bírnak, mint a Koch által vizsgáltak.

Legyen

$$D = [a_{ik}], \qquad {\scriptstyle (i,\, k = -\infty, \ldots, +\infty)}$$

legyen továbbá

$$a_{ii} = 1 + a'_{ii} \quad \text{és} \quad a_{ik} = a'_{ik}. \qquad {\scriptstyle (i \neq k)}$$

Hogy a determináns normális, az azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a'_{ii}| \text{ összetartó} \quad \text{és} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |a'_{ik}|^2 \text{ összetartó.} \tag{1}$$

Először is kimutatom, hogy $\lim_{m=\infty} D_{mm}$ véges és meghatározott szám; irhatom, hogy

$$\lim_{m=\infty} D_{mm} = D_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} (D_{kk} - D_{k-1,\, k-1}),$$

ha a jobboldali sor összetartó; tehát a szükségesnél többet bizonyitok be, ha e sor *feltétlen* összetartását mutatom ki. E czélból pedig a sor általános tagját ily alakban írom:

$$D_{kk} - D_{k-1,\, k-1} = (D_{kk} - D_{k-1,\, k}) + (D_{k-1,\, k} - D_{k-1,\, k-1}); \tag{2}$$

itt nyilván $D_{k-1,\, k}$ a D_{kk} determinánsnak ama aldeterminánsa, a mely az utolsó sor utolsó eleméhez, $1 + a'_{kk}$-höz tartozik; jelöljük azt a determinánst, a melyet D_{kk}-ból nyerek, ha ebben $1 + a'_{kk}$ helyébe zérust írok, $D^{(i)}_{kk}$-vel, akkor tehát

$$D_{kk} = (1 + a'_{kk})\, D_{k-1,\, k} + D^{(i)}_{kk}$$

innen pedig

$$D_{kk} - D_{k-1,\, k} = a'_{kk} D_{k-1,\, k} + D^{(i)}_{kk}. \tag{3}$$

Hasonlóan $D_{k-1,\, k-1}$ a $D_{k-1,\, k}$ determinánsnak ama aldeterminánsa, a mely az első sor első eleméhez $1 + a'_{-k,\, -k}$-hoz tartozik; jelöljük azt a determinánst, a melyet $D_{k-1,\, k}$-ból nyerek, ha ebben az első sor első eleme helyébe zérust írok, $D^{(s)}_{k-1,\, k}$-sel, akkor tehát

$$D_{k-1,\, k} = (1 + a'_{-k,\, -k})\, D_{k-1,\, k-1} + D^{(s)}_{k-1,\, k}$$

innen pedig

$$D_{k-1,\, k} - D_{k-1,\, k-1} = a'_{-k,\, -k} D_{k-1,\, k-1} + D^{(s)}_{k-1,\, k}. \tag{4}$$

Már most (2)-ből (3) és (4) figyelembe vételével ered:

$$|D_{kk}-D_{k-1,k-1}| \leqq |a'_{kk}|\,|D_{k-1,k}| + |D^{(i)}_{kk}| +$$
$$+ |a'_{-k,-k}|\,|D_{k-1,k-1}| + |D^{(s)}_{k-1,k}|.$$

Elegendő kimutatnom, hogy a

$$\sum_k |a'_{kk}|\,|D_{k-1,k}|,\ \sum_k |D^{(i)}_{kk}|,\ \sum_k |a'_{-k,-k}|\,|D_{k-1,k-1}|,\ \sum_k |D^{(s)}_{k-1,k}|$$

sorok külön-külön összetartók.

E czélból először a következő segédtételt bizonyítom be: $|D_{mn}|$ *egy m-től és n-től független véges határ alatt van.* E segédtétel rögtön következik az HADAMARD-féle determinánstételből, a mely így szól:[1]

Ha

$$A = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \ldots c_{nn}$$

egy n-edfokú determináns, akkor

$$|A|^2 \leqq \prod_{i=1}^{n} (|c_{i1}|^2 + |c_{i2}|^2 + \cdots + |c_{in}|^2). \tag{5}$$

Ezt a tételt a D_{mn} determinánsra alkalmazva, lesz

$$|D_{mn}|^2 \leqq \prod_{i=-n}^{m} (|a'_{i,-n}|^2 + |a'_{i,-n+1}|^2 + \cdots +$$
$$+ |a'_{i,i-1}|^2 + |a'_{i,i}+1|^2 + |a'_{i,i+1}|^2 + \cdots + |a'_{i,m}|^2),$$

a jobboldali felső határt nagyobbítom, ha a'_{ii} helyébe is ennek absolut értékét írom és ezután még inkább nagyobbítom, ha $n=\infty$-t és $m=\infty$-t írok; az így nyert végtelen szorzat az (1) föltétel következtében összetartó, jelöljük értékét π^2-tal, akkor tehát

$$|D_{mn}| \leqq \pi. \tag{6}$$

---

[1] V. ö. Az HADAMARD-féle determinánstétel stb. czímű dolgozatommal, Mathematikai és Physikai Lapok, 1910. Ujabban észrevettem, hogy e tételt E. I. NANSON is bebizonyította «A determinant inequality» czímű czikkében, mely 1901-ben a Messenger of Mathematics 31. kötetében jelent meg. Ő említi, hogy e tételt már 1886-ban Lord KELVIN kimondotta és TH. MUIR-ral közölte és hogy az később a «The Educational Times»-ben is megjelent. Miként NANSON szíves volt velem tudatni, UNIR a tételt a «The Educational Times» 1901. évfolyamában, mint «Question 14792»-t közölte. Egy bizonyítása megjelent a következő műben: Dr. UNIR, Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times, Vol. 1, New Series, p. 52.

Ezzel a segédtétel be van bizonyítva.

E tétel értelmében még

$$|D_{k-1,k}| \leqq \pi \quad \text{és} \quad |D_{k-1,k-1}| \leqq \pi\,;$$

mivel pedig az (1) föltétel értelmében a

$$\sum_k |a'_{kk}|, \quad \sum_k |a'_{-k,-k}|$$

sorok összetartók, azért a

$$\sum_k |a'_{kk}|\,|D_{k-1,k}|, \quad \sum_k |a'_{-k,-k}|\,|D_{k-1,k-1}|$$

sorok is összetartók.

Most még azt kell kimutatnom, hogy a

$$\sum_k |D^{(i)}_{kk}|, \quad \sum_k |D^{(s)}_{k-1,k}|$$

sorok is összetartók. Ezt szintén az (5) determinánstétel felhasználásával sikerül elérnem, ha előzőleg a $D^{(i)}_{kk}$, $D^{(s)}_{k-1,k}$ determinánsokon egy alkalmas átalakítást végzek. $D^{(i)}_{kk}$-t egyszer részletesen kiírom:

$$D^{(i)}_{kk} =$$

$$\left|\begin{array}{cccccccc}
1+a'_{-k,-k} & a'_{-k,-k+1} & \cdots & a'_{-k,0} & \cdots & a'_{-k,k-1} & a'_{-k,k} \\
a'_{-k+1,-k} & 1+a'_{-k+1,-k+1} & \cdots & a'_{-k+1,0} & \cdots & a'_{-k+1,k-1} & a'_{-k+1,k} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
a'_{0,-k} & a'_{0,-k+1} & \cdots & 1+a'_{00} & \cdots & a'_{0,k-1} & a'_{0,k} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
a'_{k-1,-k} & a'_{k-1,-k+1} & \cdots & a'_{k-1,0} & \cdots & 1+a'_{k-1,k-1} & a'_{k-1,k} \\
a'_{k,-k} & a'_{k,-k+1} & \cdots & a'_{k,0} & \cdots & a'_{k,k-1} & 0
\end{array}\right|.$$

Legyen rövidség kedvéért

$$\left(|a'_{-k,k}|^2+|a'_{-k+1,k}|^2+\cdots+|a'_{0,k}|^2+\cdots+|a'_{k-1,k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma^{(1)}_k,$$

$$\left(|a'_{k,-k}|^2+|a'_{k,-k+1}|^2+\cdots+|a'_{k,0}|^2+\cdots+|a'_{k,k-1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma^{(2)}_k,$$

azaz $(\sigma^{(1)}_k)^2$ az utolsó oszlop absolut értékben vett elemeinek négyzetösszege és $(\sigma^{(2)}_k)^2$ az utolsó sor absolut értékben vett elemeinek négyzetösszege. Ha most a $D^{(i)}_{kk}$ determináns utolsó oszlopának minden egyes elemét osztom $\sigma_k^{(1)}$-gyel és utolsó sorának minden egyes elemét osztom $\sigma_k^{(2)}$-vel, akkor a determinánst $\sigma_k^{(1)} \cdot \sigma_k^{(2)}$-vel osztottam, tehát

$$\frac{D_{kk}^{(i)}}{\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)}} = \begin{vmatrix} 1+a'_{-k,\,-k} & \dots & a'_{-k,\,k-1} & \dfrac{a'_{-k,\,k}}{\sigma_k^{(1)}} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a'_{k-1,\,-k} & \dots & 1+a'_{k-1,\,k-1} & \dfrac{a'_{k-1,\,k}}{\sigma_k^{(1)}} \\ \dfrac{a'_{k,\,-k}}{\sigma_k^{(2)}} & \dots & \dfrac{a'_{k,\,k-1}}{\sigma_k^{(2)}} & 0 \end{vmatrix}.$$

Most erre a determinánsra alkalmazom az (5) determinánstételt; lesz tehát

$$\frac{|D_{kk}^{(i)}|^2}{(\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)})^2} \leqq \prod_{i=-k}^{k-1}\Big(|a'_{i,\,-k}|^2 + |a'_{i,\,-k+1}|^2 + \dots + $$
$$+ |1+a'_{ii}|^2 + \dots + |a'_{i,\,k-1}|^2 + \left|\frac{a'_{ik}}{\sigma_k^{(1)}}\right|^2\Big). \qquad (7)$$

(Noha a determináns $2k$-adrendű, mégis a jobboldali szorzatban csak $2k-1$ tényező szerepel, mert az utolsó sor absolut értékben vett elemeinek négyzetösszege éppen 1 és így mint tényező elesik.) A jobboldali szorzatot nagyobbítom, ha a'_i helyébe is az ő absolut értékét írom és ezután ismét nagyobbítom a

$$\prod_i (1+|u_i|) \leqq e^{\sum\limits_i |u_i|}$$

egyenlőtlenség analogiájára; lesz tehát

$$\frac{|D_{kk}^{(i)}|^2}{(\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)})^2} \leqq e^{\sum\limits_{p,\,q=-k}^{k-1} |a'_{pq}|^2 + 2\sum\limits_{-k}^{k-1}{}_i |a'_{ii}| + \frac{1}{(\sigma_k^{(1)})^2}\sum\limits_{-k}^{k-1}{}_i |a'_{ik}|^2}.$$

Már most $\dfrac{1}{(\sigma_k^{(1)})^2}\sum\limits_{i=-k}^{k-1} |a'_{ik}|^2 = 1$, $\sigma_k^{(1)}$ definicziója szerint; az exponens többi része pedig az (1) föltétel értelmében egy k-tól független véges s határ alatt van, úgy hogy, ha még e^{s+1} helyébe g^2-t írok, akkor

$$\frac{|D_{kk}^{(i)}|}{\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)}} \leqq g,$$

avagy

$$|D_{kk}^{(i)}| \leqq g\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)}.$$

De világos, hogy

$$\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)} \leqq (\sigma_k^{(1)})^2+(\sigma_k^{(2)})^2$$

ezt figyelembe véve, lesz

$$\sum_k |D_{kk}^{(i)}| \leqq g \sum_k \left\{(\sigma_k^{(1)})^2+(\sigma_k^{(2)})^2\right\}$$

és a jobboldali összeg az (1) föltétel értelmében összetartó, mert nem más, mint a D determinánsban az átlónkívüli elemek absolut értékeinek négyzetösszege; ezzel be van bizonyítva, hogy $\sum\limits_k |D_{kk}^{(i)}|$ összetartó.

Teljesen analog módon nyerjük, hogy $\sum\limits_k |D_{k-1,k}^{(s)}|$ sor összetartó, csak a most végzett meggondolást kellene kissé változtatott jelzésekkel ismételnünk.

Be van tehát bizonyítva, hogy

$$\lim_{m=\infty} D_{mm} = D$$

véges és meghatározott szám.

Az (I) tétel teljes bebizonyítására, ki kell mutatnom, hogy még

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} D_{mn} = D.$$

Azaz ki kell mutatnom, hogy $|D_{mn}-D_{nn}|$ tetszésszerinti kicsinynyé tehető az által, hogy m-t és n-t egy bizonyos számnál nagyobbnak választom.

Legyen 1. $m>n$, akkor írhatom, hogy

$$D_{mn}-D_{nn} = (D_{mn}-D_{m-1,n})+(D_{m-1,n}-D_{m-2,n})+\cdots+$$
$$+(D_{n+1,n}-D_{nn}) = \sum_{k=n+1}^{m} (D_{kn}-D_{k-1,n}),$$

innen

$$|D_{mn}-D_{nn}| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} |D_{kn}-D_{k-1,n}|. \qquad (a)$$

Most a (3) képlet analogiájára:

$$D_{kn}-D_{k-1,\,n}=a'_{kk}D_{k-1,\,n}+D_{kn}^{(i)}, \tag{β}$$

a hol $D_{kn}^{(i)}$ jelenti tehát azt a determinánst, a melyet D_{kn}-ből nyerek, ha ebben az utolsó sor utolsó eleme $(1+a'_{kk})$ helyébe zérust írok. De a (6) reláczió értelmében

$$|D_{k-1,\,n}|\leqq\pi; \tag{γ}$$

és éppen úgy, mint a (7) egyenlőtlenséget, nyerem a következő általánosabbat:

$$\frac{|D_{kn}^{(i)}|^2}{(\sigma_{kn}^{(1)}\sigma_{kn}^{(2)})^2}\leqq\prod_{i=-n}^{k-1}\Big(|a'_{i,-n}|^2+|a'_{i,-n+1}|^2+\cdots+ \\ +|1+a'_{ii}|^2+\cdots+|a'_{i,k-1}|^2+\left|\frac{a'_{ik}}{\sigma_{kn}^{(1)}}\right|^2\Big), \tag{8}$$

a hol

$$\sigma_{kn}^{(1)}=\big(|a'_{-n,k}|^2+|a'_{-n+1,k}|^2+\cdots+|a'_{k-1,k}|^2\big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sigma_{kn}^{(2)}=\big(|a'_{k,-n}|^2+|a'_{k,-n+1}|^2+\cdots+|a'_{k,k-1}|^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

A (8) képlet levezetésére csak a

$$D_{kn}^{(i)}=\begin{vmatrix}1+a'_{-n,-n} & \dots & a'_{-n,k-1} & a'_{-n,k}\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ a'_{k-1,-n} & \dots & 1+a'_{k-1,k-1} & a'_{k-1,k}\\ a'_{k,-n} & \dots & a'_{k,k-1} & 0\end{vmatrix}$$

determinánson ugyanazt a közelfekvő átalakítást kell végeznem, a melyet a $D_{kk}^{(i)}$ determinánson részletesen elvégeztem; ezt itt tehát nem kell újra kifejtenem.

Már most a (8) alatti szorzatot ugyanúgy nagyobbítom, mint a (7) alattival tettem, tehát

$$\frac{|D_{kn}^{(i)}|^2}{(\sigma_{kn}^{(1)}\sigma_{kn}^{(2)})^2}\leqq e^{\sum\limits_{p,q=-n}^{k-1}|a'_{pq}|^2+2\sum\limits_{-n}^{k-1}{}^i|a'_{ii}|+\frac{1}{(\sigma_{kn}^{(1)})^2}\sum\limits_{-n}^{k-1}{}^i|a'_{ik}|^2},$$

és itt ismét $\frac{1}{(\sigma_{kn}^{(1)})^2}\sum\limits_{-n}^{k-1}{}^i|a'_{ik}|^2=1$, $\sigma_{kn}^{(1)}$ definicziója szerint, míg az exponens többi része az (1) föltétel értelmében egy k-tól és n-től független véges s határ alatt van, úgy hogy, ha $e^{s+1}=g^2$, akkor

$$\frac{|D_{kn}^{(i)}|}{\sigma_{kn}^{(1)}\sigma_{kn}^{(2)}}\leqq g$$

avagy

$$|D_{kn}^{(i)}|\leqq g\sigma_{kn}^{(1)}\sigma_{kn}^{(2)}$$

és még inkább áll a következő reláczió:

$$|D_{kn}^{(i)}|\leqq g\left\{(\sigma_{kn}^{(1)})^2+(\sigma_{kn}^{(2)})^2\right\}.$$

Mivel pedig az (α) alatti összegezés szerint $k>n$, azért nyilván

$$\sigma_{kn}^{(1)}\leqq\sigma_k^{(1)},\quad \sigma_{kn}^{(2)}\leqq\sigma_k^{(2)},$$

úgy, hogy a jelen esetben

$$|D_{kn}^{(i)}|\leqq g\left\{(\sigma_k^{(1)})^2+(\sigma_k^{(2)})^2\right\};$$

és most (α), (β) és (γ) figyelembe vételével

$$|D_{mn}-D_{nn}|\leqq\pi\sum_{k=n+1}^{m}|a'_{kk}|+g\sum_{k=n+1}^{m}\left\{(\sigma_k^{(1)})^2+(\sigma_k^{(2)})^2\right\}.$$

Ez a fölső határ pedig az (1) föltétel értelmében egy tetszésszerinti kis positiv ε számnál kisebbé tehető, ha csak n-t egy bizonyos számnál nagyobbnak választom.

Legyen (2) $m<n$, akkor irom, hogy

$$D_{mn}-D_{nn}=\sum_{k=m}^{n-1}(D_{kn}-D_{k+1,\,n})$$

és az előbbihez teljesen hasonló meggondolással (a melyben csak m és n szerepet cserélnek) nyerem, hogy ismét

$$|D_{mn}-D_{nn}|<\varepsilon,$$

ha csak m és n egy bizonyos számnál nagyobbak.

Ezzel egész általánosságban be van bizonyítva, hogy

$$\lim_{\substack{m=\infty\\ n=\infty}}D_{mn}=\lim_{m=\infty}D_{mm}=D$$

véges és meghatározott szám.[1]

---

[1] Csak a correctura javításakor jutott tudomásomra KOCH egy újabb dolgozata, mely «Sur la convergence des déterminants infinis» czímmel a Rendiconti Circ. Matem. Palermo 28. kötetében (2° sem. 1909) jelent meg.

Egy az 1. §-ban tett megjegyzés értelmében most már az általánosság megszorítása nélkül oly normális determinánsokra szorítkozhatunk, a melyekben az elemek indexei 1-től ∞-ig haladnak (nem pedig $-\infty$-től $+\infty$-ig).

3. §. A normális determináns mint az elemek függvénye.

Legyen M_1 és M_2 két tetszésszerint megadott positiv szám; legyen továbbá

$$x_{ik} \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2, \ldots)}$$

a komplex változóknak egy kétszeresen végtelen sorozata és a változók értelmezési tartománya a

$$\sum_{i,k} |x_{ik}|^2 \leqq M_1, \quad \sum_i |x_{ii}| \leqq M_2 \qquad (T)$$

feltételek által legyen meghatározva. Felírom e determinánst:

$$D\big((x_{ik})\big) = [x_{ik} + \delta_{ik}], \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2, \ldots)}$$

a hol

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k, \\ 1, & \text{ha } i = k. \end{cases}$$

Ez a determináns a (T) tartomány bármely helyén normális, tehát a konvergenczia-kriterium értelmében a (T) tartományban az x_{ik} (i, $k=1$, $2, \ldots$) kétszeresen végtelen sok változónak egyértékű függvénye.[1]

A $D\big((x_{ik})\big)$ függvénynek néhány tulajdonságát vezetem le, a melyek a további vizsgálatokban igen hasznosaknak fognak

---

Ebben H. v. KOCH — az én módszeremtől egészen eltérő módon — szintén kimutatta, hogy a tágabb értelemben normális determinánsok összetartók és kitért némely más tulajdonságukra is. Dolgozatában az összetartás egy szigorubb definicziója is szerepel és benne e tárgykörre vonatkozó egyéb irodalmi adatok is találhatók.

[1] Egyszeresen végtelen sok változós függvényekkel először HILBERT foglalkozott kimerítően; v. ö. i. h.

Az előbbi §-ban szereplő D determináns az itt bevezetett függvény értékkészletének egy speciális egyede.

bizonyulni. E czélból nem mellőzhetem néhány jelölés és definiczió bevezetését.

A változók rendszerét röviden így jelölöm: (x_{ik}).

Ha $D((x_{ik}))$-ban az

$$\begin{matrix} x_{11} & \dots & x_{1m} \\ . & \dots & . \\ x_{m1} & \dots & x_{mm} \end{matrix}$$

értékeket változatlanul meghagyjuk, a többi x helyébe pedig mindenütt zérust írunk, akkor a determináns a következőre redukálódik:

$$D_m = [x_{ik} + \delta_{ik}]\,; \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\dots,\,m)}$$

ezért D_m-t $D((x_{ik}))$ *m-edik metszetének* nevezzük (HILBERT-nél: «Abschnitt») és néha így is jelöljük: $[D((x_{ik}))]_m$.

Tétel: A $D((x_{ik}))$ függvény a (T) tartományban határolt.

Ez rögtön következik az előbbi §. (6) relácziójából, a mely szerint most

$$|D_m((x_{ik}))| \leqq \pi,$$

a hol π nemcsak m-től független, hanem — miként a (6) reláczió levezetéséből kitűnik — független az egyes változók értékeitől is (a (T) tartományban) és csak a megadott M_1 és M_2 számoktól függ. Úgy, hogy tehát még

$$|D((x_{ik}))| \leqq \pi. \qquad (9)$$

Definiczió: Az x_{ik} $(i, k=1, 2,\dots)$ kétszeresen végtelen sok változónak valamely $F((x_{ik}))$ függvényéről azt mondjuk, hogy egy megadott (a'_{ik}) helyen folytonos, ha az $F((a'_{ik}+\varepsilon_{ik}))$ értékek $F((a'_{ik}))$ felé tartanak, valahányszor az (ε_{ik}) értékrendszer oly $(\varepsilon_{ik}^{(h)})$ $(h=1, 2,\dots)$ értékrendszersorozatot fut át, hogy egyenként[1]

$$\lim_{h=\infty} \varepsilon_{ik}^{(h)} = 0, \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\dots)}$$

---

[1] Tehát nem kivánom meg, hogy e limes-egyenlet i- és k-ra *egyenletesen* teljesüljön; ha ezt a megszorítást is bevezetném, akkor a folytonosság egy új, tágabb fajtáját definiálnám, a mely a most definiált «közönséges» és a később értelmezett «korlátoltan való» folytonosság között áll. Könnyű kimutatni, hogy a végtelen normális determináns, még ebben az értelemben sem folytonos a (0) helyen.

azaz röviden, ha

$$\lim_{\varepsilon_{11}=0,\ \varepsilon_{12}=0,\ldots} F(a'_{11}+\varepsilon_{11},\ a'_{12}+\varepsilon_{12},\ldots) = F(a'_{11},\ a'_{12},\ldots).$$

(Az ε_{ik} értékek természetesen még annak a feltételnek is alá vannak vetve, hogy az $(a'_{ik}+\varepsilon_{ik})$ *pont* mindenkor a (T) tartományba essék.)

Tétel: A $D\big((x_{ik})\big)$ függvény a $(\boldsymbol{T})$ tartományban nem folytonos, mert már a (0) helyen sem folytonos.

Ugyanis nyilván

$$D\big((0)\big) = 1\,;$$

ha pedig az $(\varepsilon_{ik}^{(h)})$ értékrendszert oly módon határozom meg, hogy $\varepsilon_{hh}^{(h)} = 1$, a többi $\varepsilon_{ik}^{(h)}$ pedig egyenlő zérussal (ez a pont a (T) tartományba esik, ha csak $M_2 \geqq 1$), akkor

$$D\big((\varepsilon_{ik}^{(h)})\big) = 2,$$

tehát

$$\lim_{h=\infty} D\big((\varepsilon_{ik}^{(h)})\big) = 2\,;$$

azaz a határérték a helyettesitési értéktől különbözik, a mi épen bebizonyitandó volt.

Definiczió: A $D\big((x_{ik})\big)$ függvényről azt mondom, hogy egy megadott (a'_{ik}) helyen *korlátoltan folytonos,* ha a $D\big((a'_{ik}+\varepsilon_{ik})\big)$ értékek $D\big((a'_{ik})\big)$ felé tartanak, valahányszor az $(a'_{ik}+\varepsilon_{ik})$ pont a (T) tartományban oly $(a'_{ik}+\varepsilon_{ik}^{(h)})\,(h=1,\ 2,\ldots)$ pontsorozatot fut át, hogy

$$\lim_{h=\infty} \sum_{i,\,k} |\,\varepsilon_{ik}^{(h)}\,|^2 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{h=\infty} \sum_{i} |\,\varepsilon_{ii}^{(h)}\,| = 0\,; \tag{10}$$

röviden ezt igy jelöljük:

$$\lim_{\left(\substack{\sum_{i,k} |\varepsilon_{ik}|^2 = 0 \\ \sum_i |\varepsilon_{ii}| = 0}\right)} D\big((a'_{ik}+\varepsilon_{ik})\big) = D\big((a'_{ik})\big).$$

E §-ban végczélom a következő tétel bebizonyitása:

A $D\big((x_{ik})\big)$ függvény a (T) tartomány bármely helyén korlátoltan folytonos.

Hogy e tételt bebizonyitsam, egy magában véve is érdekes egyenlőtlenséget vezetek le, a melyet más helyen is fel fogok használni. Ez az egyenlőtlenség két tetszésszerinti determináns különbségének absolut értékére felső határt ad; az általánosság megszorítása nélkül feltehetem, hogy a két determináns egyenlő rendű, mert hiszen ezt az esetleg alacsonyabb rendű determináns kellő szegélyezésével mindig elérhetem. Legyen tehát a két determináns:

$$A_n = [a_{ik}], \quad B_n = [b_{ik}]. \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

Írhatom, hogy

$$A_n - B_n = \sum_{i=1}^{n} (D_n^{(i-1)} - D_n^{(i)}), \tag{11}$$

a hol $D_n^{(0)} = A_n$, továbbá $D_n^{(1)}$ jelentse azt a determinánst, a melyet $D_n^{(0)}$-ból nyerek, ha ebben az első oszlopot a B_n determináns első oszlopával helyettesítem s általában $D_n^{(i)}$ jelentse azt a determinánst, a melyet $D_n^{(i-1)}$-ből nyerek, ha ebben az i-edik oszlopot a B_n determináns i-edik oszlopával helyettesítem; úgy hogy végül $D_n^{(n)} = B_n$ és $D_n^{(i)}$ $D_n^{(i-1)}$-től csak az i-edik oszlopban tér el, tehát a különbségüket *egy* determináns alakjában írhatom ilyformán:

$$D_n^{(i-1)} - D_n^{(i)} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,i-1} & a_{1i} - b_{1i} & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,i-1} & a_{2i} - b_{2i} & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{i-1,1} & b_{i-1,2} & \ldots & b_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} - b_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{i,i-1} & a_{ii} - b_{ii} & a_{i,i+1} & \ldots & a_{in} \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & \ldots & b_{i+1,i-1} & a_{i+1,i} - b_{i+1,i} & a_{i+1,i+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,i-1} & a_{ni} - b_{ni} & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Jelöljük e determinánst ideiglenesen $\Delta^{(i)}$-vel; az $a_{ii} - b_{ii}$ elemhez tartozó aldeterminánsát $\Delta_i^{(i)}$-vel és azt a determinánst, a melyet $\Delta^{(i)}$-ből nyerek, ha ebben $a_{ii} - b_{ii}$ helyébe zérust írok, $\Delta^{(i,i)}$-vel; akkor — a 2. §. (3) képletéhez hasonlóan —

$$\Delta^{(i)} = (a_{ii} - b_{ii})\, \Delta_i^{(i)} + \Delta^{(i,i)},$$

a honnan

$$|\Delta^{(i)}| \leqq |a_{ii}-b_{ii}|\,|\Delta_i^{(i)}| + |\Delta^{(i,\,i)}|. \tag{12}$$

Legyen most G_1 és G_2 úgy meghatározva, hogy

$$\sum_{i,\,k}\{|a'_{ik}|^2 + |b'_{ik}|^2\} \leqq G_1^2 \quad \text{és} \quad \sum_i \{|a'_{ii}| + |b'_{ii}|\} \leqq G_2,$$

a hol

$$a'_{ik} = a_{ik} - \delta_{ik}, \quad b'_{ik} = b_{ik} - \delta_{ik}$$

és

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq k, \\ 1, & \text{ha } i = k; \end{cases}$$

akkor a (9) képlethez hasonlóan

$$|\Delta_i^{(i)}| \leqq P, \tag{13}$$

a hol P csak G_1- és G_2-től függ.

Legyen továbbá rövidség kedvéért

$$|a_{1i}-b_{1i}|^2 + |a_{2i}-b_{2i}|^2 + \cdots + |a_{ni}-b_{ni}|^2 = d_i^2,$$

$$|b_{i1}|^2 + |b_{i2}|^2 + \cdots + |b_{i,\,i-1}|^2 + |a_{i,\,i+1}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2 = s_i^2,$$

akkor ugyanolyan meggondolással, mint a milyet a 2. §-ban a $D_{kk}^{(i)}$ és $D_{kn}^{(i)}$ determinánsok lebecslésére alkalmaztam, nyerem, hogy

$$|\Delta^{(i,\,i)}| \leqq G d_i s_i, \tag{14}$$

a hol ismét G csak G_1 és G_2-től függ.

Most (12)-ből (13) és (14) figyelembe vételével:

$$|D_n^{(i-1)} - D_n^{(i)}| \leqq |a_{ii}-b_{ii}|\,.\,P + d_i s_i G; \tag{15}$$

és (11)-ből következik, hogy

$$|A_n - B_n| \leqq \sum_{i=1}^{n} |D_n^{(i-1)} - D_n^{(i)}|, \tag{16}$$

tehát (15) és (16) egybevetésével

$$|A_n - B_n| \leqq P \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}-b_{ii}| + G \sum_{i=1}^{n} d_i s_i.$$

Most a LAGRANGE-CAUCHY-féle egyenlőtlenséget alkalmazom, a mely így szól

$$\sum_i d_i s_i \leqq (\sum_i d_i^2)^{\frac{1}{2}}.\,(\sum_i s_i^2)^{\frac{1}{2}}; \tag{17}$$

mivel pedig nyilván

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i,k=1}^{n} | a_{ik} - b_{ik} |^2$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \leqq G_1^2,$$

ezek figyelembe vételével végül

$$| A_n - B_n | \leqq G G_1 \left(\sum_{i,k=1}^{n} | a_{ik} - b_{ik} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} + P \sum_{i=1}^{n} | a_{ii} - b_{ii} |.$$

Ez az egyenlőtlenség végtelen normális determinánsokra is érvényes, mert áttérhetek benne az $n=\infty$ határra és ha az

$$A_n, \; B_n, \; G, \; G_1, \; P$$

mennyiségek határértékét rendre

$$A, \; B, \; \overline{G}, \; \overline{G}_1, \; \overline{P}\text{-sal}$$

jelölöm, akkor

$$| A - B | \leqq \overline{G}\overline{G}_1 \left(\sum_{i,k=1}^{\infty} | a_{ik} - b_{ik} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{P} \sum_{i=1}^{\infty} | a_{ii} - b_{ii} |. \tag{18}$$

Ebből az egyenlőtlenségből rögtön következik a $D\big((x_{ik})\big)$ függvény korlátolt folytonossága; ugyanis (18) értelmében most

$$\left| D\big((x_{ik} + \varepsilon_{ik})\big) - D\big((x_{ik})\big) \right| \leqq \overline{G}\overline{G}_1 \left(\sum_{i,k} | \varepsilon_{ik} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \bar{P} \sum_{i} | \varepsilon_{ii} |,$$

a hol a (T) és (10) föltételek tekintetbe vételével, $\overline{G}$, $\overline{G}_1$, $\overline{P}$ csakis M_1 és M_2-től függnek és innen közvetlenül:

$$\lim_{\left(\substack{\sum_{i,k} | \varepsilon_{ik} |^2 = 0 \\ \sum_{i} | \varepsilon_{ii} | = 0}\right)} \left| D\big((x_{ik} + \varepsilon_{ik})\big) - D\big((x_{ik})\big) \right| = 0,$$

a mi épen bebizonyítandó volt.[1]

A normális determinánsoknak itt bebizonyított korlátolt folytonosságát a következő fejezetekben ismételten fel fogjuk használni.

---

[1] Ebből az egyenlőtlenségből a 2. §-ban levezetett konvergenczia-tétel is rögtön következik.

4. §. Aldeterminánsok.

A

$$D = [a_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2, \ldots)}$$

determinánsban tetszésszerinti r számú sort választunk ki, a melyek indexei legyenek:

$$i_1, i_2, \ldots, i_r$$

és r számú oszlopot, a melyek indexei legyenek:

$$k_1, k_2, \ldots, k_r;$$

helyettesítsünk e sorokba és oszlopokba az $a_{i_p k_q}$ elem helyébe 0-t, ha $p \neq q$ és 1-t, ha $p = q$; az így nyert determinánst egy *r-edik aldeterminánsnak* nevezzük és így jelöljük:

$$\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_r \\ k_1 k_2 \ldots k_r \end{pmatrix} = D^{(r)}.$$

Az

$$[a_{ik}] \qquad \begin{pmatrix} i = i_1, i_2, \ldots, i_r \\ k = k_1, k_2, \ldots, k_r \end{pmatrix}$$

determinánst egy *r-edrendű aldeterminánsnak* és $D^{(r)}$-t az ő adjungáltjának nevezzük.

Világos, hogy érvényes a következő tétel:

Egy normális determinánsnak bármely r-edik (r véges szám) aldeterminánsa szintén normális.

Jelöljük azt a determinánst, a mely D-ből az $i_1, i_2, \ldots, i_r$ indexű sorok és a $k_1, k_2, \ldots, k_r$ indexű oszlopok elhagyása által keletkezik, $D'^{(r)}$-rel, akkor

$$D^{(r)} = (-1)^{(i_1-k_1)+\cdots+(i_r-k_r)} D'^{(r)}.$$

Mert, ha

$$m > i_n, k_n, \qquad {\scriptstyle (n=1,\, 2, \ldots,\, r)}$$

akkor

$$D_m^{(r)} = D'^{(r)}_m (-1)^{(i_1-k_1)+\cdots+(i_r-k_r)},$$

a miből a fenti reláczió következik.

Az $[a_{ik}]$ ($i = i_1, \ldots, i_r$; $k = k_1, \ldots, k_r$) és $D'^{(r)}$ determinánsokat egymáshoz komplementär aldeterminánsoknak nevezzük.

Ha az

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$$

aldeterminánsban két i (vagy k) indexet egymással fölcserélünk, akkor az aldetermináns előjelét változtatja.

Ugyanis rögtön látjuk, hogy az egyik aldetermináns a másikból nyerhető két sor (vagy oszlop) egymásközti felcserélése által; pl. a fenti aldeterminánsban az (i_1, k_1), (i_2, k_2) indexű helyeken 1 áll; ha most a k_1 és k_2 indexű oszlopokat egymással felcserélem, akkor az így nyert determinánsban az (i_2, k_1) és (i_1, k_2) helyeken áll 1, az i_1 és i_2 indexű sorok, továbbá a k_1 és k_2 indexű oszlopok többi helyein pedig zérus áll; az új determináns tehát, a mely az előbbivel ellenkező előjelű, a következő

$$\begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_r \\ k_2 k_1 \dots k_r \end{pmatrix}.$$

Ezzel állításunk igazolva van.

Innen rögtön következik, hogy ha $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$-ben két i (vagy k) index egymással megegyezik, akkor az aldetermináns értéke zérus.

Lemma: Az

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

n-edik főminor 1 felé tart, ha n minden határon túl nő.

Mert ez a főminor úgy tekinthető, mint a $D((x_{ik}))$ függvény helyettesitési értéke a következő helyen:

$$\begin{aligned} x_{ik} &= 0, \quad \text{ha } i, \text{ vagy } k = 1, 2, \dots, n, \\ x_{ik} &= a'_{ik}, \quad \text{ha } i, \text{ és } k > n. \end{aligned}$$

Ha most $n = 1, 2, \dots$, akkor itt oly pontsorozatról van szó, a mely a (10) föltételnek eleget tesz és a (0) pont felé tart, tehát a bebizonyitott korlátolt folytonosság értelmében

$$\lim_{n=\infty} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{pmatrix} = D((0)) = 1.$$

5. §. Kifejtések.

Legyen adva a

$$D=[a_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2,\ldots)}$$

normális determináns. Írhatom, hogy

$$D=\sum_{m=1}^{\infty}(D_m-D_{m-1}),$$

a hol

$$D_0=0, \quad D_m=[a_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2,\ldots,\, m)}$$

és a végtelen sor a 2. §-ban előadottak értelmében feltétlenül összetartó. Legyen

$$D_m-D_{m-1}=\Delta_m,$$

akkor

$$D=\sum_{m=1}^{\infty}\Delta_m, \tag{19}$$

a hol

$$\Delta_m=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a'_{mm} \end{vmatrix}.$$

A véges determinánsok LAPLACE-féle kifejtése végtelen normális determinánsokra átvihető.

Jelöljük az a_{ik} elem adjungáltját A_{ik}-val; azt állítom, hogy

$$D=\sum_{k=1}^{\infty}A_{ik}a_{ik}=A_{i1}a_{i1}+A_{i2}a_{i2}+\cdots \tag{20}$$

(az i-edik sor szerinti kifejtés).

Jelöljük a (20) alatti végtelen sor első n tagjának összegét s_n-nel (n egyelőre fix szám); jelöljük továbbá azt a determinánst, a melyet D-ből nyerünk, ha ebben $a_{i,\,n+1}$, $a_{i,\,n+2}, \ldots$ helyébe zérust teszünk $D\left(\underset{r>n}{a_{ir}=0}\right)$-vel; akkor könnyű kimutatnom, hogy

$$s_n=D\left(\underset{r>n}{a_{ir}=0}\right). \tag{21}$$

Ugyanis, ha $m>n$, akkor nyilván

$$D_m\left(\begin{smallmatrix}a_{ir}=0\\ r>n\end{smallmatrix}\right) = a_{i1}\,[A_{i1}]_m + a_{i2}\,[A_{i2}]_m + \cdots + a_{in}\,[A_{in}]_m\,;$$

(a hol $[A_{ik}]_m$ az A_{ik} determináns m-edik metszete) és ha most áttérek az $m=\infty$ határra, tekintve, hogy n egy fix szám, a határátmenetet tagonként végezhetem el és éppen a (21) relá-czióra jutok.

Most figyelembe véve, hogy a D determináns az ő elemeinek korlátoltan folytonos függvénye, lesz

$$\lim_{n=\infty} D\left(\begin{smallmatrix}a_{ir}=0\\ r>n\end{smallmatrix}\right) = D,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} s_n = D.$$

Ezzel a (20) egyenlet is be van bizonyítva; azaz be van bizonyítva, hogy a (20) alatti végtelen sor összetartó és hogy értéke D.

Kimutatom még, hogy a (20) alatti végtelen sor *feltétlenül* is összetartó.

Tekintsük e czélból D-ben, illetőleg az ő végtelen sorában az $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ elemeket változóknak, a melyek a következő tartományban variálhatnak

$$|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots \leqq 1.$$

A D determináns e tartomány minden helyén normális, tehát a (20) alatti kifejtés is érvényes marad és lineár függvénye a végtelen sok változónak; de a (9) relączió értelmében létezik egy véges M szám úgy, hogy az egész tartományban érvényes a következő egyenlőtlenség

$$|D| \leqq M;$$

ebből a tényből következik,[1] hogy

$$|A_{i1}|^2 + |A_{i2}|^2 + \cdots \leqq M^2. \tag{22}$$

---

[1] V. ö. HILBERT, i. h. Vierte Mitteilung, p. 176.

Innen pedig a (20) alatti végtelen sor feltétlen összetartása rögtön következik, mert a

$$\sum_i |c_i d_i| \leqq \sum_i |c_i|^2 + \sum_i |d_i|^2 \tag{23}$$

egyenlőtlenség[1] analogiájára lesz

$$\sum_k |A_{ik} a_{ik}| \leqq \sum_k |a_{ik}|^2 + \sum_k |A_{ik}|^2.$$

E fejtegetések teljesen érvényben maradnak, ha a determináns i-edik sora helyett a k-adik oszlopból indulunk ki, tehát még

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} a_{ik}.$$

Ha pedig a D determinánsban az i-edik sor helyébe a j-ediket, illetőleg a k-adik oszlop helyébe az l-ediket írjuk, akkor az így nyert determinánsok normálisak és zérus értékűek, tehát ezeket kifejtve, nyerjük, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} a_{jk} = 0 \qquad (j \neq i)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} a_{il} = 0 \qquad (l \neq k)$$

és e sorok feltétlenül összetartók.

Általánosabban a következő kifejtés is érvényes:

$$D = \sum^{k_1} \sum^{k_2} \cdots \sum^{k_r}_{k_1 < k_2 < \cdots < k_r} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \cdots & a_{i_1 k_r} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{i_r k_1} & \cdots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ k_1 \ldots k_r \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Először is kimutatom, hogy a (24) alatti r-szeresen végtelen sor feltétlenül összetartó. Figyelembe véve ismét a (23) relácziót, a mely többszörösen végtelen sorokra is érvényes, czélunk elérésére elegendő a következő két sor összetartását kimutatnom:

---

[1] Ez az egyenlőtlenség könnyen igazolható: mivel nyilván

$$|c_i d_i| \leqq |c_i|^2 + |d_i|^2,$$

tehát

$$\sum_i |c_i d_i| \leqq \sum_i |c_i|^2 + \sum_i |d_i|^2.$$

$$S_1 = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_r} {}_{k_1} \sum {}_{k_2} \ldots \sum {}_{k_r} \left\{ \text{abs.} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ . & \ldots & . \\ a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix} \right\}^2, \tag{25}$$

$$S_2 = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_r} {}_{k_1} \sum {}_{k_2} \ldots \sum {}_{k_r} \left| \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ k_1 \ldots k_r \end{pmatrix} \right|^2. \tag{26}$$

Legyen

$$S_{1n} = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leqq n} {}_{k_1} \sum {}_{k_2} \ldots \sum {}_{k_r} \left\{ \text{abs.} \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & \ldots & a_{i_1 k_r} \\ . & \ldots & . \\ a_{i_r k_1} & \ldots & a_{i_r k_r} \end{vmatrix} \right\}^2.$$

Ha $\lim\limits_{n=\infty} S_{1n}$ véges és meghatározott szám, akkor az S_1 sor összetartó; világos, hogy az $S_{11}, S_{12}, \ldots, S_{1n}, \ldots$ positiv számok sora sohasem fogyó, tehát $\lim\limits_{n=\infty} S_{1n}$ létezésére elegendő kimutatnom, hogy S_{1n} egy n-től független véges határ alatt van. Már most, ha az a_{ik} szám komplex konjugált értékét $\bar{a}_{ik}$-val jelöljük, akkor a matrixek elmélete szerint

$$S_{1n} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \ldots & a_{i_1 n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \ldots & a_{i_r n} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \bar{a}_{i_1 1} & \bar{a}_{i_1 2} & \ldots & \bar{a}_{i_1 n} \\ . & . & \ldots & . \\ \bar{a}_{i_r 1} & \bar{a}_{i_r 2} & \ldots & \bar{a}_{i_r n} \end{Vmatrix},$$

és most a matrixekre általánosított Hadamard-féle tétel szerint[1]

$$S_{1n}^2 \leqq \prod_{\nu=1}^{r} \left(|a_{i_\nu 1}|^2 + |a_{i_\nu 2}|^2 + \cdots + |a_{i_\nu n}|^2 \right),$$

a mely szorzat éppen úgy, mint a (8) alatti egy n-től független véges határ alatt van.

Ezzel a (25) sor összetartása be van bizonyítva.

A (26) sor összetartását következőképen mutatom ki.

A sort r részre képzelem felosztva (r fix szám) és kimutatom, hogy mindegyik részletsor külön-külön összetartó. A t-edik részletsor — a melyet $S_2^{(t)}$-vel jelölök — azon tagokat ölelje fel, a melyekben a $k_1, k_2, \ldots, k_r$ indexek közül pontosan t számú ($t \leqq r$) i_r-nél nagyobb, a melyekben tehát

[1] V. ö. a 233. oldalon idézett dolgozatommal.

$$k_1 \leqq i_r,\ k_2 \leqq i_r, \ldots, k_{r-t} \leqq i_r,\ k_{r-t+1} > i_r, \ldots, k_r > i_r.$$

Föltehetem, hogy $t>0$, mert $t=0$-hoz csak végesszámú tag tartozik, ezektől tehát az összetartás vizsgálatában eltekinthetek.

Világos, hogy ekkor az $\binom{i_1 \ldots i_r}{k_1 \ldots k_r}$ determináns

$$k_{r-t+1},\ k_{r-t+2}, \ldots, k_r$$

indexű t számú sorában a D determináns egyetlenegy átlós eleme sem fordul elő, mert például a k_{r-t+1} indexű oszloppal együtt az $a_{k_{r-t+1}, k_{r-t+1}}$ átlós elem is töröltetik, tehát a meglevő k_{r-t+1} indexű sorban nincs átlós elem. Ezt figyelembe véve még az (5) tétel és az (1) föltétel felhasználásával könynyen nyerem, hogy

$$\left|\binom{i_1 \ldots i_r}{k_1 \ldots k_r}\right|^2 \leqq \pi \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_{r-t+1}\nu}|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_{r-t+2}\nu}|^2\Big) \cdots \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_r\nu}|^2\Big),$$

a hol π egy véges és meghatározott szám.

Innen pedig következik

$$S_2^{(t)} \leqq \pi \sum_{i_r < k_{r-t+1} < k_{r-t+2} < \cdots < k_r} \!\!\!\!\!\!\!\! {}^{k_{r-t+1}} \sum{}^{k_{r-t+2}} \cdots \sum{}^{k_r}$$
$$\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_{r-t+1}\nu}|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_{r-t+2}\nu}|^2\Big) \cdots \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_r\nu}|^2\Big),$$

és még inkább érvényes a következő relációzió

$$S_2^{(t)} \leqq \pi \Big(\sum_{k_{r-t+1}=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_{r-t+1}\nu}|^2\Big) \Big(\sum_{k_{r-t+2}=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_{r-t+2}\nu}|^2\Big) \cdots$$
$$\cdots \sum_{k_r=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_r\nu}|^2\Big),$$

ez a kifejezés pedig az (1) föltétel következtében véges.

Ezzel be van bizonyítva, hogy a (26) sor összetartó és így a (24) sor is feltétlenül összetartó.

Ki kell még mutatnom, hogy a (24) alatti végtelen sor értéke tényleg D.

E czélból végezzük D-ben a következő helyettesítést:

$$a_{i_1\nu}=0,\ a_{i_2\nu}=0,\dots,a_{i_r\nu}=0,$$
$$(\nu=m+1,\ m+2,\dots)$$

(azaz az $i_1, i_2, \dots, i_r$ indexű sorokban valamely $m+1$-ediktől kezdve minden elem helyébe zérust írok) az így keletkezett determinánst jelöljük $D^{(m)}$-mel; ez a $D^{(m)}$ determináns a (24) alatti sor egy részletösszegével egyenlő, nevezetesen

$$D^{(m)}=\sum_{k_1<k_2<\dots<k_r\leq m}\sum\dots\sum\begin{vmatrix}a_{i_1k_1} & \dots & a_{i_1k_r}\\ \cdot & \dots & \cdot\\ a_{i_rk_1} & \dots & a_{i_rk_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}i_1\dots i_r\\ k_1\dots k_r\end{pmatrix}\end{vmatrix},$$

mert e reláczió nyilván érvényes az n-edik metszetekre, mivel pedig az összeg n-től függetlenül végesszámú tagból áll, tehát tagonként képezve az n-edik metszeteket és áttérve az $n=\infty$ határra a fenti relácziót nyerem. Mivel pedig D az elemeknek korlátoltan folytonos függvénye, azért

$$\lim_{m=\infty} D^{(m)}=D;$$

tehát a (24) alatti sor D felé tart.

Érvényes még a következő reláczió:

$$\sum_{k_1<k_2<\dots<k_r}{}_{k_1}\sum{}_{k_2}\dots\sum{}_{k_r}\begin{vmatrix}a_{j_1k_1} & \dots & a_{j_1k_r}\\ \cdot & \dots & \cdot\\ a_{j_rk_1} & \dots & a_{j_rk_r}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\begin{pmatrix}i_1\dots i_r\\ k_1\dots k_r\end{pmatrix}\end{vmatrix}=0,$$

a hol a $j_1, \dots, j_r$ sorozat az $i_1, \dots, i_r$ sorozattól legalább egy tagban különbözik; mert a fenti sor azon normális determináns kifejtésének tekinthető, a melyet D-ből nyerek, ha ebben az $i_1, \dots, i_r$ indexű sorok helyébe a $j_1, \dots, j_r$ indexű sorokat írom, de ennek a determinánsnak legalább két sora egymással megegyezik, tehát a fenti kifejtés feltétlenül összetartó és zérus értékű.

Még egy másnemű kifejtésre egy későbbi §. eredményei fognak vezetni.

A következő czikkekben áttérünk arra, hogy a végtelen normális determinánsokra vonatkozó vizsgálatokat kiterjeszszük a végtelen determinánsok egy általánosabb osztályára. A nyert eredmények lehetővé teszik végtelen lineár egyenletrendszerek explicit megoldását. Innen önként folyik az elmélet alkalmazása a lineár integrálegyenletek általános tárgyalására, a melyben végül a sajátos értékekre vonatkozó exisztenczia-tételnek egy új bebizonyítását adom.

Az elmélet egyéb alkalmazásait különálló dolgozatok alakjában szándékozom bemutatni.

6. §. Két normális determináns szorzása.

Legyen két normális determináns:

$$A = [a_{ik}], \quad B = [b_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2,\, \ldots)}$$

definiáljuk a c_{ik} számokat a következő relácziók által:

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{kj}, \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2,\, \ldots)}$$

a jobboldali végtelen sor feltétlenül összetartó, mert a (23) egyenlőtlenség analogiájára

$$\sum_j |a_{ij} b_{kj}| \leqq \sum_j |a_{ij}|^2 + \sum_j |b_{kj}|^2.$$

Képezem most e végtelen determinánst:

$$C = [c_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\, k=1,\, 2,\, \ldots)}$$

és bebizonyítom, hogy:

a) a C determináns normális;

b) érvényes ez a reláczió:

$$C = AB.$$

a) Legyen

$$a_{ik} = a'_{ik}, \quad b_{ik} = b'_{ik}, \quad c_{ik} = c'_{ik} \qquad {\scriptstyle (i \neq k)}$$
$$a_{ii} = 1 + a'_{ii}, \quad b_{ii} = 1 + b'_{ii}, \quad c_{ii} = 1 + c'_{ii};$$

definicziónk értelmében:

$$c'_{ik} = a'_{ik} + b'_{ki} + \sum_j a'_{ij} b'_{kj}, \tag{27}$$

$$c'_{ii} = a'_{ii} + b'_{ii} + \sum_j a'_{ij} b'_{ij}, \tag{28}$$

és feltevésünk értelmében:

$$\sum_{i,k} |a'_{ik}|^2, \quad \sum_i |a'_{ii}|, \quad \sum_{i,k} |b'_{ik}|^2, \quad \sum_i |b'_{ii}|$$

összetartó sorok; bebizonyítandó, hogy a posteriori

$$\sum_{i,k} |c'_{ik}|^2, \quad \sum_i |c'_{ii}|$$

szintén összetartók.

A (17) egyenlőtlenség analogiájára (27)-ből:

$$|c'_{ik}|^2 \leqq 3\,|a'_{ik}|^2 + 3\,|b'_{ki}|^2 + 3\,\big(\sum_j |a'_{ij} b'_{kj}|\big)^2,$$

és még egyszer alkalmazva a (17) egyenlőtlenséget:

$$|c'_{ik}|^2 \leqq 3\,|a'_{ik}|^2 + 3\,|b'_{ki}|^2 + 3\,\big(\sum_j |a'_{ij}|^2\big)\big(\sum_j |b'_{kj}|^2\big),$$

innen pedig

$$\sum_{i,k} |c'_{ik}|^2 \leqq 3 \sum_{i,k} |a'_{ik}|^2 + 3 \sum_{i,k} |b'_{ki}|^2 + 3 \sum_{i,k} \big\{\big(\sum_j |a'_{ij}|^2\big)\big(\sum_j |b'_{jk}|^2\big)\big\}.$$

Itt $\sum_{i,k} |a'_{ik}|^2$, $\sum_{i,k} |b'_{ki}|^2$ feltevésünk értelmében összetartók; a jobboldal utolsó tagja pedig így írható:

$$\sum_i \sum_k \big\{\big(\sum_j |a'_{ij}|^2\big)\big(\sum_j |b'_{kj}|^2\big)\big\} = \sum_i \big\{\big(\sum_j |a'_{ij}|^2\big)\big(\sum_{k,j} |b'_{kj}|^2\big)\big\} =$$
$$= \big(\sum_{i,j} |a'_{ij}|^2\big)\big(\sum_{k,j} |b'_{kj}|^2\big)$$

ez a kifejezés is összetartó; tehát $\sum_{i,k} |c'_{ik}|^2$ összetartó.

Most még (28)-ból

$$|c'_{ii}| \leqq |a'_{ii}| + |b'_{ii}| + \sum_j |a'_{ij} b'_{ij}|$$

és az utolsó tagra alkalmazva a (23) relácziót:

$$|c'_{ii}| \leqq |a'_{ii}| + |b'_{ii}| + \sum_j |a'_{ij}|^2 + \sum_j |b'_{ij}|^2,$$

innen pedig

$$\sum_i |c'_{ii}| \leqq \sum_i |a'_{ii}| + \sum_i |b'_{ii}| + \sum_{i,j} |a'_{ij}|^2 + \sum_{i,j} |b'_{ij}|^2.$$

Itt a jobboldali kifejezés összetartó, tehát $\sum_i |c'_{ii}|$ összetartó.

Ezzel be van bizonyítva, hogy a C determináns normális.

b) Bebizonyítom, hogy

$$C = AB.$$

Legyen röviden:

$$\mu_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{kj}, \quad -\varepsilon_{ik}^{(m)} = c_{ik} - \mu_{ik} = \sum_{j=m+1}^{\infty} a_{ij} b_{kj},$$

$$C_m^{(m)} = [\mu_{ik}] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots m)$$

és mint eddig

$$A_m = [a_{ik}], \quad B_m = [b_{ik}], \quad C_m = [c_{ik}]; \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

úgy, hogy

$$\lim_{m=\infty} A_m = A, \quad \lim_{m=\infty} B_m = B, \quad \lim_{m=\infty} C_m = C.$$

Már most a véges determinánsok szorzásának szabálya értelmében

$$C_m^{(m)} = A_m B_m,$$

tehát

$$\lim_{m=\infty} C_m^{(m)} = AB;$$

ha tehát ki tudom mutatni, hogy

$$\lim_{m=\infty} C_m^{(m)} = \lim_{m=\infty} C_m,$$

akkor tételünk be lesz bizonyítva.

E czélból a (18) relácziót alkalmazom s lesz

$$| C_m^{(m)} - C_m | \leqq g_1 \left(\sum_{i,k=1}^{m} | \varepsilon_{ik}^{(m)} |^2 \right)^{\frac{1}{2}} + g_2 \sum_{i=1}^{m} | \varepsilon_{ii}^{(m)} |,$$

a hol g_1, g_2 meghatározott számok, a melyek m-től függetlenek. Már most

$$| \varepsilon_{ik}^{(m)} | \leqq \sum_{j=m+1}^{\infty} | a_{ij} b_{kj} |, \quad | \varepsilon_{ii}^{(m)} | \leqq \sum_{j=m+1}^{\infty} | a_{ij} b_{ij} |$$

és egyrészt a (17), másrészt a (23) egyenlőtlenség alkalmazásával

$$| \varepsilon_{ik}^{(m)} |^2 \leqq \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} | a_{ij} |^2 \right) \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} | b_{kj} |^2 \right)$$

és

$$|\varepsilon_{ii}^{(m)}| \leqq \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 + \sum_{j=m+1}^{\infty} |b_{ij}|^2;$$

innen pedig közvetlenül

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |\varepsilon_{ik}^{(m)}|^2 \leqq (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{ij}|^2)(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{\infty} |b_{kj}|^2)$$

és

$$\sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_{ii}^{(m)}| \leqq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{ij}|^2 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=m+1}^{\infty} |b_{ij}|^2.$$

E két egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő összegek jelentik az A, illetőleg a B determinánsban foglalt azon elemeknek absolut értékben vett négyzetösszegét, a mely elemek az m-ed rendű főminor melletti parallelogrammában fekszenek; e kifejezések az (1) föltétel következtében m növekedtével zérus felé tartanak, azaz

$$\lim_{m=\infty} \sum_{i,k=1}^{m} |\varepsilon_{ik}^{(m)}|^2 = 0, \quad \lim_{m=\infty} \sum_{i=1}^{m} |\varepsilon_{ii}^{(m)}| = 0.$$

Ezzel be van bizonyítva, hogy

$$\lim_{m=\infty} C_m = \lim_{m=\infty} C_m^{(m)},$$

tehát

$$C = AB.$$

Végtelen normális determinánsok szorzása tehát épen úgy végezhető, mint a véges determinánsoké.

Minthogy egy normális végtelen determinánsban is a sorokat az oszlopokkal felcserélhetem, tehát — úgy mint véges determinánsok esetében — itt is a szorzást négyféle módon végezhetem el.

7. §. Végtelen mátrixek és szorzatuk.

Az a_{ik} $(i, k=1, 2, \ldots)$ elemeknek egy ily schemáját

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\ldots \end{matrix}$$

egy végtelen soksorú és oszlopú mátrixnek nevezzük. Ez a schema egy végtelen determinánst határoz meg, ha megadjuk a kezdőelemet.

A D végtelen determinánsnak $i_1, i_2, \ldots, i_m$ indexű sorai egy *m-sorú végtelen mátrix*-et alkotnak, a többi sorok alkotta végtelen mátrixet pedig egy *m-edik mátrix*-nek nevezem és így jelölöm:

$$D(i_1, i_2, \ldots, i_m).$$

Megállapodunk abban, hogy két végtelen mátrix szorzatát épen úgy képezzük, mint a hogyan két determináns szorzatát képezzük; a sorok komponálásával képezett determinánst *soronkénti szorzat*-nak, az oszlopok komponálásával képezettet *oszloponkénti szorzat*-nak nevezzük.

Legyen A és B két normális determináns és képezzük a soronkénti szorzatukat:

$$AB = C,$$

a hol tehát a C determináns általános eleme

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{kj}.$$

Felírom C-nek két egymáshoz komplementär aldeterminánsát:

$$C_m = [c_{\alpha\beta}], \quad (\alpha = i_1, \ldots, i_m;\ \beta = k_1, \ldots, k_m)$$

$$c_m = \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_m \\ k_1 \ldots k_m \end{pmatrix} (-1)^{(i_1-k_1)+\cdots+(i_m-k_m)},$$

akkor világos, hogy a C_m aldetermináns egyenlő a következő két m-sorú végtelen mátrix soronkénti szorzatával:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \ldots \\ . & . & \ldots \\ a_{i_m 1} & a_{i_m 2} & \ldots \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & b_{k_1 2} & \ldots \\ . & . & \ldots \\ b_{k_m 1} & b_{k_m 2} & \ldots \end{vmatrix};$$

és a C_m aldetermináns egyenlő a következő két m-edik mátrix soronkénti szorzatával:

$$A(i_1, i_2, \ldots, i_m), \quad B(k_1, k_2, \ldots, k_m).$$

Tehát két normális determináns szorzatának bármely (véges vagy végtelen) aldeterminánsa előállitható mint két végtelen mátrix szorzata.

Továbbá, épen úgy, mint a véges determinánsok elméletében érvényes e tétel:

Két m-sorú végtelen mátrix oszloponkénti szorzata zérus értékű.

Mert ha csak $n > m$, a szorzat-determináns n-edik metszete zérus értékű, mint a mely két m-sorú és n-oszlopú mátrix oszloponkénti szorzata.

Nevezzünk valamely mátrixet *normális*nak, ha sorait egy normális determináns sorai alkotják.

Az A és B normális determinánsok első m-sora két normális mátrixet alkot, (elegendő csak *ezen* m-sorú mátrixekkel foglalkoznunk, mert áthelyezéssel bármely sorokat tehetem elsőkké) ezek szorzata definiczió szerint

$$C_m = [c_{ik}], \qquad (i, k = 1, \ldots, m)$$

a hol

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{kj}.$$

Bebizonyítjuk a következő tételt:

A C_m determináns, a mely két m-sorú normális mátrix szorzata, oly feltétlenül összetartó sorba fejthető, a melynek tagjai a mátrixekből képezhető m-edrendű homolog aldeterminánsok szorzatai. (Homologok azon determinánsok, a melyek ugyanazon indexű oszlopokból képeztetnek.)

Legyenek ugyanis sorban

$$A_1, A_2, \dots, A_r, \dots$$
$$B_1, B_2, \dots, B_r, \dots$$

ama homolog m-edrendű determinánsok, a melyeket az adott mátrixekből képezhetünk: legyen $n > m$, $\mu = \binom{n}{m}$ és az A_r, B_r determinánsok elrendezése már olyan legyen, hogy $S_\mu = \sum_{r=1}^{\mu} A_r B_r$ jelentse azon homolog determinánsok szorzatösszegét, a melyeket a megadott mátrixek *első n-számú* oszlopából képezhetünk. A szóban levő végtelen sor

$$S = \sum_{r=1}^{\infty} A_r B_r.$$

Hogy ez a sor feltétlenül összetartó, az a (25) alatti sor (5. §.) feltétlen összetartásából rögtön következik (a (23) egyenlőtlenség figyelembe vételével).

Ha még bebizonyítom, hogy

$$\lim_{\mu=\infty} S_\mu = C_m,$$

akkor tételünk teljesen be lesz bizonyítva.

Már most a véges mátrixek szorzásának szabálya szerint

$$S_\mu = C_m^{(n)} = [c_{ik}^{(n)}], \qquad (i, k=1, 2, \dots, m)$$

a hol

$$c_{ik}^{(n)} = a_{i1}b_{k1} + a_{i2}b_{k2} + \dots + a_{in}b_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{kj}.$$

Legyen röviden

$$\varepsilon_{ik}^{(n)} = \sum_{j=n+1}^{\infty} a_{ij}b_{kj},$$

akkor

$$c_{ik} = c_{ik}^{(n)} + \varepsilon_{ik}^{(n)},$$

$$C_m = [c_{ik}^{(n)} + \varepsilon_{ik}^{(n)}]. \qquad (i, k=1, 2, \dots, m)$$

Most alkalmazzuk a (18) relácziót a $C_m - C_m^{(n)}$ különbségre, akkor nyerjük, hogy

$$| C_m - C_m^{(n)} | \leq M \Big(\sum_{i, k=1}^{m} | \varepsilon_{ik}^{(n)} |^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + M' \sum_{i=1}^{m} | \varepsilon_{ii}^{(n)} |,$$

a hol M és M' véges és meghatározott számok. Továbbá a (17) alatti LAGRANGE-CAUCHY-féle repláczió értelmében

$$| \varepsilon_{ik}^{(n)} |^2 \leqq (\sum_{j=n+1}^{\infty} | a_{ij} |^2)(\sum_{j=n+1}^{\infty} | b_{kj} |^2),$$

$$| \varepsilon_{ii}^{(n)} | \leqq (\sum_{j=n+1}^{\infty} | a_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=n+1}^{\infty} | b_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Innen pedig egyrészt közvetlenül

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} | \varepsilon_{ik}^{(n)} |^2 \leqq (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} | a_{ij} |^2)(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} | b_{kj} |^2)$$

és másrészt ismét a LAGRANGE-CAUCHY-féle reláczió alkalmazásával

$$\sum_{i=1}^{m} | \varepsilon_{ii}^{(n)} | \leqq (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} | a_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=n+1}^{\infty} | b_{ij} |^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Az itt megállapitott felső határok nyilván n növekedtével zérus felé tartanak, tehát

$$\lim_{n=\infty} C_m^{(n)} = C_m,$$

azaz

$$\lim_{\mu=\infty} S_\mu = C_m.$$

A mi bebizonyitandó volt.

Az analog tételt az m-edik mátrixekre is bebizonyitom; itt a bizonyitás már bonyolódottabb.

8. §. Végtelen sok sorú és oszlopú (m-edik) mátrixek szorzatának kifejtése.

Legyen a két normális mátrix:

$$A(1, 2, \ldots, m), \quad B(1, 2, \ldots, m);$$

ezek szorzata definiczió szerint

$$c_m = \begin{pmatrix} 1 \ldots m \\ 1 \ldots m \end{pmatrix} = [c_{ik}], \quad (i, k = m+1, m+2, \ldots)$$

a hol, mint az előbbi §-ban

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} b_{kj}.$$

Vizsgáljuk a következő végtelen sort:

$$S=\sum\begin{pmatrix}1\ldots m\\ k_1\ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}\cdot\begin{pmatrix}1\ldots m\\ k_1\ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)},$$

a hol $\begin{pmatrix}1\ldots m\\ k_1\ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}$, illetőleg $\begin{pmatrix}1\ldots m\\ k_1\ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)}$ az A, illetőleg a B determináns homolog m-edik aldeterminánsai; az összegezés az összes ilyen aldeterminánsokra kiterjesztendő.

Hogy az S sor feltétlenül összetartó, az a (26) sor feltétlen összetartásából rögtön következik (a (23) egyenlőtlenség figyelembe vételével).

Legyen $\mu=\binom{m+n}{m}$ és az S sor tagjai oly elrendezésűek legyenek, hogy a μ-edik részletösszeg ama tagokat ölelje fel, a melyekben a $k_1,\ldots,k_m$ indexsorozat az $1, 2,\ldots, m+n$ sorozatból van véve; n jelentsen bármely positiv egész számot.

Be fogom bizonyítani, hogy

$$\lim_{\mu=\infty} S_\mu = c_m,$$

és ezzel be lesz bizonyítva, hogy

$$S=c_m.$$

E czélból vegyük tekintetbe az

$$\begin{Vmatrix} a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \cdots & a_{m+1,m} & a_{m+1,m+1} & \cdots & a_{m+1,m+n}\\ a_{m+2,1} & a_{m+2,2} & \cdots & a_{m+2,m} & a_{m+2,m+1} & \cdots & a_{m+2,m+n}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ a_{m+n,1} & a_{m+n,2} & \cdots & a_{m+n,m} & a_{m+n,m+1} & \cdots & a_{m+n,m+n}\end{Vmatrix}$$

mátrix és a b_{ik} elemekből analog módon képezett mátrix szorzatát; e két n-sorú és $m+n$ oszlopú mátrix szorzata egyenlő a következő determinánssal:

$$c_m^{(n)}=[c_{ik}^{(n)}], \qquad (i, k=m+1,\ldots, m+n)$$

a hol

$$c_{ik}^{(n)}=a_{i1}b_{k1}+a_{i2}b_{k2}+\cdots+a_{i,m+n}b_{k,m+n}=\sum_{j=1}^{m+n}a_{ij}b_{kj}.$$

Könnyen sikerül kimutatnom, hogy

$$\lim_{n=\infty} c_m^{(n)} = c_m;$$

ugyanis legyen röviden:

$$\varepsilon_{ik}^{(n)} = \sum_{j=m+n+1}^{\infty} a_{ij} b_{kj},$$

akkor

$$c_{ik} = c_{ik}^{(n)} + \varepsilon_{ik}^{(n)}$$

és a (18) reláczió alkalmazásával közvetlenül nyerem, hogy

$$|c_m - c_m^{(n)}| \leqq M\,(\sum_{i,k=m+1}^{m+n} |\varepsilon_{ik}^{(n)}|^2 + \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{k=m+n+1}^{\infty} |c'_{ik}|^2 +$$
$$+ \sum_{i,k=m+n+1}^{\infty} |c'_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}} + M'\,(\sum_{i=m+1}^{m+n} |\varepsilon_{ii}^{(n)}| + \sum_{i=m+n+1}^{\infty} |c'_{ii}|),$$

a hol M és M' véges és meghatározott számok és

$$c'_{ik} = c_{ik} - \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k, \\ 1 & i = k. \end{cases}$$

Már most tudvalévő, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{k=m+n+1}^{\infty} |c'_{ik}|^2 = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i,k=m+n+1}^{\infty} |c'_{ik}|^2 = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n=\infty} \sum_{i=m+n+1}^{\infty} |c'_{ii}| = 0,$$

(mert a $[C_{ik}]$ determináns normális) továbbá (ugyanolyan meggondolással, mint az előbbi §-ban)

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{k=m+1}^{m+n} |\varepsilon_{ik}^{(n)}|^2 \leqq (\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=m+n+1}^{\infty} |a_{ij}|^2)(\sum_{k=m+1}^{m+n} \sum_{j=m+n+1}^{\infty} |b_{kj}|^2)$$

és

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} |\varepsilon_{ii}^{(n)}| \leqq (\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=m+n+1}^{\infty} |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=m+1}^{m+n} \sum_{j=m+n+1}^{\infty} |b_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

az itt megállapított felső határok nyilván n növekedtével szintén zérus felé tartanak, tehát valóban

$$\lim_{n=\infty} c_m^{(n)} = c_m.$$

Kimutatom, hogy még

$$\lim_{n=\infty} c_m^{(n)} = \lim_{n=\infty} S_\mu .$$

Ugyanis a két tekintetbe vett n-sorú és $m+n$ oszlopú mátrix szorzatát úgy is írhatom, mint egy μ számú tagból álló szorzatösszeget $\left(\mu = \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}\right)$, melyben az egyes tényezők nyilván az S_μ szorzatösszeg egyes tényezőinek n-edrendű főminorai; írhatjuk tehát, hogy

$$S_\mu - c_m^{(n)} = \sum\sum \cdots \sum_{k_1<k_2<\cdots<k_m\leqq m+n} \left\{\begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)} \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)} - \right.$$
$$\left. - \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}_n \cdot \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)}_n \right\},$$

ezt az összegezést rövidség kedvéért így fogom jelezni: $\sum\limits_{(k)}^{m+n}$.

Az

$$|uv - u_n v_n| \leqq |(u-u_n)v| + |(v-v_n)u_n|$$

könnyen verifikálható képlet analogiájára nyerem, hogy

$$|S_\mu - c_m^{(n)}| \leqq \sum_{(k)}^{m+n} \left| \left\{ \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)} - \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}_n \right\} \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)} \right| +$$
$$+ \sum_{(k)}^{m+n} \left| \left\{ \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)} - \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)}_n \right\} \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}_n \right|,$$

és a (17) reláczió alkalmazásával

$$|S_\mu - c_m^{(n)}| \leqq$$
$$\leqq \left(\sum_{(k)}^{m+n} \left| \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)} - \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{(k)}^{m+n} \left| \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ \left(\sum_{(k)}^{m+n} \left| \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)} - \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(b)}_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{(k)}^{m+n} \left| \begin{pmatrix}1 \ldots m\\ k_1 \ldots k_m\end{pmatrix}^{(a)}_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Az itt felmerülő két szorzat jobboldali tényezői a (26) sor összetartása folytán egy véges, n-től független H határ alatt vannak; a baloldali tényezőkről pedig kimutatom, hogy ezek n növekedtével zérus felé tartanak; elegendő ezt az egyik tényezőről kimutatnom, mert a másikat nyerem belőle, ha az a_{ik} és b_{ik} elemeket egymással fölcserélem.

Vizsgálom tehát ezt az összeget:

$$S_{m,n}^{(a)} = \sum_{(k)}^{m+n} \left| \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}^{(a)} - \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}_n^{(a)} \right|^2$$

és pedig m-számú részre képzelem felosztva, a mely részösszegekről kimutatom, hogy külön-külön zérus felé tartanak. (m egy a priori megadott és az egész tárgyalás folyamán változatlan érték.) A t-edik részösszeg — a melyet röviden $S_t^{(n)}$-vel fogok jelölni — azon tagokat ölelje fel, a melyekben a $k_1, \dots, k_m$ indexek közül pontosan t-számú m-nél nagyobb, tehát

$$k_1 \leqq m, k_2 \leqq m, \dots, k_{m-t} \leqq m, k_{m-t+1} > m, \dots, k_m > m.$$

Föltehetem, hogy $t>0$, mert a $t=0$ értékhez csak egy tag tartozik és ez n növekedtével zérus felé tart.

Most az

$$\begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}^{(a)} - \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}_n^{(a)}$$

különbségen hasonló meggondolást végzek ahhoz, a melyet a 3. §-ban az $A_n - B_n$ különbségen végeztem; írom tehát, hogy

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}^{(a)} - \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}_n^{(a)} \right| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} | D^{(i-1)} - D^{(i)} |, \qquad (29)$$

a hol $D^{(i)}$ olyan jelentéssel bír, mint a 3. §-ban $D_n^{(i)}$.

Fontos körülmény, hogy az $S_t^{(n)}$-ben szereplő determinánsoknak

$$k_{m-t+1}, k_{m-t+2}, \dots, k_m$$

indexű soraiban az A determinánsnak *egy* átlós eleme sem fordul elő, mert például a k_m indexű oszlop törlése által az

$a_{k_m k_m}$ elem is töröltetik, tehát a meglevő k_m indexű sorban sincs átlós elem. Ezt szem előtt tartva, legyen i a $k_{m-t+1}, \ldots, k_m$ számoktól különböző és nagyobb mint $m+n$, akkor úgy mint a 3. §-ban a (15) képletet nyertem, most a következőt nyerem:

$$|D^{(i-1)}-D^{(i)}| \leqq$$

$$\leqq \{P|a'_{ii}|+(\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^r |a'_{ri}|^2)^{\frac{1}{2}}.(\sum_{1}^{\infty}{}^r |a'_{ir}|^2)^{\frac{1}{2}}.G\} p_{k_{m-t+1}} \ldots p_{k_m}, \quad (30)$$

a hol P, G véges és meghatározott számok és

$$p_{k_r} = (\sum_{\nu=1}^{\infty} |a'_{k_r \nu}|^2)^{\frac{1}{2}};$$

továbbá, ha $i \leqq m+n$, akkor hasonlo módon

$$|D^{(i-1)}-D^{(i)}| \leqq (\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^r |a'_{ri}|^2)^{\frac{1}{2}}.(\sum_{r=1}^{\infty} |a'_{ir}|^2)^{\frac{1}{2}}.G.p_{k_{m-t+1}} \ldots p_{k_m}, \quad (31)$$

és végül könnyen nyerem a következőt

$$|D^{(k_{m-t'}-1)}-D^{(k_{m-t'})}| \leqq (\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^r |a'_{r,k_{m-t'}}|^2)^{\frac{1}{2}}.G.p_{k_{m-t+1}} \ldots p_{k_m}. \quad (32)$$

$$(t'=0, 1, \ldots, t-1)$$

Most (30)-ból

$$\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^i |D^{(i-1)}-D^{(i)}| \leqq$$

$$\leqq p_{(k)}^{(t)} \{P \sum_{m+n+1}^{\infty}{}^i |a'_{ii}| + G \sum_{m+n+1}^{\infty}{}^i [(\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^r |a'_{ri}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{1}^{\infty}{}^r |a'_{ir}|^2)^{\frac{1}{2}}]\},$$

a hol rövidség kedvéért

$$p_{(k)}^{(t)} = p_{k_{m-t+1}} \cdot p_{k_{m-t+2}} \ldots p_{k_m};$$

a (17) egyenlőtlenség felhasználásával

$$\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^i [(\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^r |a'_{ri}|^2)^{\frac{1}{2}}.(\sum_{1}^{\infty}{}^r |a'_{ir}|^2)^{\frac{1}{2}}] \leqq$$

$$\leqq (\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^i \sum_{m+n+1}^{\infty}{}^r |a'_{ri}|^2)^{\frac{1}{2}}.(\sum_{m+n+1}^{\infty}{}^i \sum_{1}^{\infty}{}^r |a'_{ir}|^2)^{\frac{1}{2}},$$

és tekintetbe véve, hogy az A determináns normális, írhatom röviden, hogy

$$\sum_{m+n+1}^{\infty} {}^{i} \, | D^{(i-1)} - D^{(i)} | \leqq p^{(t)}_{(k)} \cdot \varepsilon_n, \tag{33}$$

a hol

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Hasonlóan (31)- és (32)-ből ismét a (17) egyenlőtlenség felhasználásával

$$\sum_{1}^{m+n} {}^{i} \, | D^{(i-1)} - D^{(i)} | \leqq p^{(t)}_{(k)} \cdot \Big\{ \big(\sum_{1}^{m+n} {}^{i} \sum_{m+n+1}^{\infty} {}^{r} \, | a'_{ri} |^2\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\sum_{1}^{m+n} {}^{i} \sum_{1}^{\infty} {}^{r} \, | a'_{ir} |^2\big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{0}^{t-1} {}^{t'} \big(\sum_{m+n+1}^{\infty} {}^{r} \, | a'_{r,\, k_{m-t'}} |^2 \big)^{\frac{1}{2}} \Big\} \cdot G,$$

tehát ismét röviden

$$\sum_{1}^{m+n} {}^{i} \, | D^{(i-1)} - D^{(i)} | \leqq p^{(t)}_{(k)} \cdot \varepsilon'_n \tag{34}$$

és itt is

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon'_n = 0.$$

Most (29)-ből (33) és (34) figyelembe vételével

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}^{(a)} - \begin{pmatrix} 1 \dots m \\ k_1 \dots k_m \end{pmatrix}^{(a)}_n \right|^2 \leqq (p^{(t)}_{(k)})^2 \cdot \varepsilon''_n,$$

a hol

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon''_n = 0;$$

és innen

$$| S^{(n)}_t | \leqq \varepsilon''_n \sum_{k_1 \leqq m} \dots \sum_{k_{m-t} \leqq m} \sum_{1}^{\infty} {}^{k_{m-t+1}} \dots \sum_{1}^{\infty} {}^{k_m} \, p^2_{k_{m-t+1}} \dots p^2_{k_m}$$

és az összegezést elvégezve

$$| S^{(n)}_t | \leqq \varepsilon''_n m^{m-t} \big(\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} | a'_{\mu\nu} |^2 \big)^t;$$

itt ε''_n tényezője egy n-től független véges szám, tehát be van bizonyítva, hogy

$$\lim_{n=\infty} S^{(n)}_t = 0; \qquad (t=1, 2, \dots, m)$$

mivel pedig

$$S^{(a)}_{m,\, n} = S^{(n)}_1 + S^{(n)}_2 + \dots + S^{(n)}_m,$$

tehát

$$\lim_{n=\infty} S^{(a)}_{m,n} = 0$$

ès még

$$\lim_{n=\infty}(S_\mu - c^{(n)}_m) = 0,$$

azaz

$$S = c_m.$$

Kimondhatjuk tehát a következő tételt:

A C_m végtelen determináns, a mely két m-edik normális mátrix szorzata, oly feltétlenül összetartó sorba fejthető, a melynek tagjai a mátrixekből m oszlop törlése által képezhető m-edik homolog aldeterminánsok szorzatai.

Végül még a következő tételt is bebizonyítom:

Két m-edik normális mátrix oszloponkénti szorzata zérus értékű.

Ugyanis a két mátrixet determinánsoknak tekinthetem, melyeknek kezdő elemük az első sor első eleme; jelöljük ezeket a determinánsokat $A^{(m)}$, illetőleg $B^{(m)}$-mel. Ezek nem normális determinánsok, de összetartók és értékük zérus; mert ha $A^{(m)}$ n-edik főminorát $A_n^{(m)}$-nel jelölöm és reá a már ismertetett Hadamard-féle determináns tételt alkalmazom, akkor rögtön észreveszem, hogy $\lim_{n=\infty} A_n^{(m)}$ létezik és zérussal egyenlő; hasonlóan $\lim_{n=\infty} B_n^{(m)}$ is létezik és zérussal egyenlő.

A szorzatdetermináns alakján semmit sem változtat az, hogy a tényezőket mátrixeknek tekintem-e vagy determinánsoknak; tehát az előzők értelmében mondhatom, hogy az $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ determinánsok *soronkénti* szorzata a c_m determináns. Czélom kimutatni, hogy e két determináns *oszloponkénti* szorzata normális és zérus értékű.

Legyen e szorzatdetermináns

$$\Gamma = [\gamma_{ik}], \qquad (i, k=1, 2, \ldots)$$

a hol tehát

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=m+1}^{\infty} a_{ji} b_{jk}.$$

Legyen

$$\gamma_{ik} = \gamma'_{ik}, \quad \text{ha} \quad i \neq k;$$

$$\gamma_{ii} = \gamma'_{ii} + 1,$$

akkor rögtön észreveszszük, hogy

$$\gamma'_{ik} = a'_{ki} + b'_{ik} + \sum_{j=m+1}^{\infty} a'_{ji} b'_{jk}, \quad \text{ha} \quad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} > m$$

és ugyanoly meggondolással, mint a milyet a 6. §-ban a C determináns normális voltának a bebizonyítására alkalmaztunk, könnyen nyerjük, hogy a Γ determináns tényleg normális, tehát összetartó is. Legyen az ő n-edik főminora Γ_n, ki akarom mutatni, hogy

$$\lim_{n=\infty} \Gamma_n = 0.$$

Legyen az $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$ n-edrendű determinánsok oszloponkénti szorzása által keletkező determináns:

$$\Gamma^{(n)} = [\gamma_{ik}^{(n)}], \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

a hol tehát

$$\gamma_{ik}^{(n)} = \sum_{j=m+1}^{m+n} a_{ji} b_{jk}.$$

Világos, hogy

$$\lim \Gamma^{(n)} = \lim_{n=\infty} A_n^{(m)} \,.\, B_n^{(m)} = 0;$$

ha tehát sikerül kimutatnom, hogy

$$\lim_{n=\infty} (\Gamma_n - \Gamma^{(n)}) = 0,$$

akkor tételünk be lesz bizonyítva.

Legyen röviden

$$\gamma_{ik} - \gamma_{ik}^{(n)} = \sum_{j=m+n+1}^{\infty} (a_{ji} b_{jk}) = \varepsilon_{ik}^{(n)},$$

akkor a (18) képlet analogiájára

$$|\Gamma_n - \Gamma^{(n)}| \leqq M \Big(\sum_{i,k=1}^{n} |\varepsilon_{ik}^{(n)}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} + M' \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_{ii}^{(n)}|,$$

a hol M, M' véges és meghatározott számok. Már most épen úgy, mint az előbbi §-ban a $C_m - C_m^{(n)}$ különbség tárgyalásánál

$$|\varepsilon_{ik}^{(n)}|^2 \leqq (\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |a_{ji}|^2)(\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |b_{jk}|^2),$$

és innen

$$|\varepsilon_{ii}^{(n)}| \leqq (\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |a_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |b_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |\varepsilon_{ik}^{(n)}|^2 \leqq (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |a_{ji}|^2)(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |b_{jk}|^2),$$

$$\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_{ii}^{(n)}| \leqq (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |a_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m+n+1}^{\infty} |b_{ji}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

A jobboldali kifejezések n növekedtével zérus felé tartanak, tehát

$$\lim_{n=\infty} (\Gamma_n - \Gamma^{(n)}) = 0.$$

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

Megjegyzés. Az $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ determinánsok egyszerű példáját alkotják az oly determinánsoknak, a melyek összetartók ugyan, de nem normálisak és nem is hódolnak a szorzás közönséges szabályának, a mennyiben soronkénti szorzatuk eltér oszloponkénti szorzatuktól.

9. §. Néhány speciális identitás, a melyek egy normális determináns aldeterminánsai közt fennállanak.

A

$$\sum_m \left| \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & m \\ k_1 \dots k_r & k \end{pmatrix} \right|^2$$

sor összetartó, mert ez nem más, mint az $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$ normális determinánsból vett és a k indexű oszlop elemeihez tartozó aldeterminánsok absolut értékeinek négyzetösszege.

Már most a következő kétszeresen végtelen sor

$$S = \sum_m \sum_\lambda \left| \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & m \\ k_1 \dots k_r & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} a_{m\lambda} \right|$$

szintén összetartó; ugyanis írhatom, hogy

$$S=\sum_m\left\{\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\right|\left|\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a_{m\lambda}\right|\right\},$$

tehát még

$$S\leqq\sum_m\left\{\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\right|\left(\left|\binom{i}{m}\right|+\left|\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a'_{m\lambda}\right|\right)\right\},$$

avagy

$$S\leqq\sum_m\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\binom{i}{m}\right|+\sum_m\left\{\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\right|\left|\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a'_{m\lambda}\right|\right\}$$

és a jobboldali összeg mindkét része összetartó, a miről könnyen meggyőződünk a (17) egyenlőtlenség ismételt fölhasználásával. Nevezetesen

$$\sum_m\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\binom{i}{m}\right|\leqq\left(\sum_m\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_m\left|\binom{i}{m}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

és a jobb oldalon álló két tényező mindegyike összetartó; továbbá

$$\sum_m\left\{\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\right|\left|\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a'_{m\lambda}\right|\right\}\leqq$$

$$\leqq\left(\sum_m\left|\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_m\left(\left|\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a'_{m\lambda}\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

és a jobboldali első tényezőről már tudjuk, hogy összetartó, a másik tényező pedig szintén összetartó, mert

$$\sum_m\left(\left|\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a'_{m\lambda}\right|\right)^2\leqq\sum_m\left(\sum_\lambda\left|\binom{i}{\lambda}\right|^2\sum_\lambda|a'_{m\lambda}|^2\right)=$$

$$=\left(\sum_\lambda\left|\binom{i}{\lambda}\right|^2\right)\left(\sum_m\sum_\lambda|a'_{m\lambda}|^2\right)$$

ez a kifejezés pedig nyilván összetartó.

Tehát az S sor összetartó; ennek folytán, ha

$$S'=\sum_m\sum_\lambda\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\binom{i}{\lambda}a_{m\lambda},$$

akkor

$$S'=\sum_m\left\{\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}\sum_\lambda\binom{i}{\lambda}a_{m\lambda}\right\}=$$

$$=\sum_\lambda\left\{\binom{i}{\lambda}\sum_m\begin{pmatrix} i_1\dots i_r & m\\ k_1\dots k_r & k\end{pmatrix}a_{m\lambda}\right\};\quad(35)$$

de mivel

$$\sum_\lambda \binom{i}{\lambda} a_{m\lambda} = \begin{cases} D, & \text{ha } m=i, \\ 0, & \text{ha } m \neq i, \end{cases} \tag{36}$$

továbbá

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & m \\ k_1 \dots k_r & k \end{pmatrix} a_{m\lambda} =$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}, & \text{ha } \lambda = k \\ -\begin{pmatrix} i_1 \dots i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} \dots i_r \\ k_1 \dots k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} \dots k_r \end{pmatrix}, & \text{ha } \lambda = k_\nu \ (\nu=1,\dots,r) \\ 0, & \text{ha } \lambda \neq k, k_1, \dots, k_r \end{cases} \tag{37}$$

ezeket (35)-be behelyettesitve, egyrészt

$$S' = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & i \\ k_1 \dots k_r & k \end{pmatrix} D,$$

másrészt

$$S' = \binom{i}{k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} - \sum_{\nu=1}^{r} \binom{i}{k_\nu} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} \dots i_r \\ k_1 \dots k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} \dots k_r \end{pmatrix},$$

a mi a következő identitásra vezet

$$\binom{i}{k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{i}{k_\nu} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} \dots i_r \\ k_1 \dots k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} \dots k_r \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & i \\ k_1 \dots k_r & k \end{pmatrix} . D. \tag{38}$$

Abban a speczialis esetben, ha i az $i_1, \dots, i_r$ indexek egyike, pl. $i=i_1$, D együtthatója eltűnik és az identitás a következőre redukálódik

$$\binom{i_1}{k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} = \binom{i_1}{k_1} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_r \\ k & k_2 \dots k_r \end{pmatrix} + \dots + \binom{i_r}{k_r} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{r-1} & i_r \\ k_1 \dots k_{r-1} & k \end{pmatrix}.$$

Figyelembe véve, hogy a sorok és oszlopok szerepét egymással fölcserélhetjük, még a következő indentitás is fennáll:

$$\binom{i}{k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{i_\nu}{k} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{\nu-1} & i & i_{\nu+1} \dots i_r \\ k_1 \dots k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} \dots k_r \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & i \\ k_1 \dots k_r & k \end{pmatrix} . D, \tag{39}$$

a mely $k=k_1$ mellett ily alakra redukálódik:

$$\binom{i}{k_1}\binom{i_1 \dots i_r}{k_1 \dots k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i\; i_2 \dots i_r}{k_1\, k_2 \dots k_r} + \dots +$$

$$+\binom{i_r}{k_1}\binom{i_1 \dots i_{r-1}\; i}{k_1 \dots k_{r-1}\; k_r}.$$

Végül a (37) alatti identitás megvilágítására, részletesebben írjuk, hogy

$$\sum_m \binom{i_1 \dots i_r\; m}{k_1 \dots k_r\; k} a_{mk_\nu} = -\sum_m \binom{i_1 \dots i_\nu \dots i_r\; m}{k_1 \dots k \dots k_r\; k_\nu} a_{mk_\nu} =$$

$$= -\binom{i_1 \dots i_\nu \dots i_r}{k_1 \dots k \dots k_r}.$$

A (38) és (39) identitásokat még általánosítjuk. Egyszerűség kedvéért legyen

$$(i_1, i_2, \dots, i_p) = (i)_p$$

az i elemeknek egy p-edosztályú kombinácziója. Legyen D_m D-nek m-edrendű főminora; akkor érvényes a következő identitás:[1]

$$\binom{i_1 \dots i_r}{k_1 \dots k_r}_m \cdot \binom{a_1 \dots a_s}{\delta_1 \dots \delta_s}_m = \binom{i_1 \dots i_r\; a_1 \dots a_s}{k_1 \dots k_r\; \delta_1 \dots \delta_s}_m \cdot D_m +$$

$$+(-1)^{s-1} \sum_{(\nu)_s} \binom{a_1 \dots a_s}{k_{\nu_1} \dots k_{\nu_s}}_m \cdot \binom{i_1 \dots i_{\nu_1} \dots i_{\nu_s} \dots i_r}{k_1 \dots \delta_{\nu_1} \dots \delta_{\nu_s} \dots k_r}_m,$$

a hol $s \leqq r < m$ és az összegezés az $1, 2, \dots, r$ számok minden s-edrendű kombinácziójára terjesztendő ki. Mivel az összeg véges, tehát az $m = \infty$ határra áttérhetek tagonként és akkor nyerem, hogy

$$\binom{i_1 \dots i_r}{k_1 \dots k_r}\binom{a_1 \dots a_s}{\delta_1 \dots \delta_s} = \binom{i_1 \dots i_r\; a_1 \dots a_s}{k_1 \dots k_r\; \delta_1 \dots \delta_s} D +$$

$$+(-1)^{s-1} \sum_{(\nu)_s} \binom{a_1 \dots a_s}{k_{\nu_1} \dots k_{\nu_s}}\binom{i_1 \dots i_{\nu_1} \dots i_{\nu_s} \dots i_r}{k_1 \dots \delta_{\nu_1} \dots \delta_{\nu_s} \dots k_r}, \quad (40)$$

és analog módon

---

[1] V. ö. GAZZANIGA, loc. cit. p. 194—195.

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \dots a_s \\ \delta_1 \dots \delta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \; a_1 \dots a_s \\ k_1 \dots k_r \; \delta_1 \dots \delta_s \end{pmatrix} D +$$

$$+(-1)^{s-1} \sum_{(\nu)_s} \begin{pmatrix} i_{\nu_1} \dots i_{\nu_s} \\ \delta_1 \dots \delta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \dots a_{\nu_1} \dots a_{\nu_s} \dots i_r \\ k_1 \dots k_{\nu_1} \dots k_{\nu_s} \dots k_r \end{pmatrix}, \quad (41)$$

$$s \leqq r.$$

Ezek a (38) és (39) identitások általánosításai.

10. §. Eltünő determinánsok és mátrixek; rangszám.

Legyen egy normális determináns

$$D = 0;$$

ha létezik egy véges h szám, úgy hogy a h-adik aldeterminánsok nem mind tűnnek el, de az alacsonyabb indexű aldeterminánsok mind eltűnnek, akkor azt mondjuk, hogy *D-nek rangszáma* (karakterisztikája) h.

Valamely r-edik *normális mátrixet eltünő*-nek nevezünk, ha az összes belőle képezhető r-edik aldeterminánsok eltűnnek; ezen aldeterminánsok mindegyikéhez tartozik egy rangszám; ezen rangszámok legkisebbikét nevezzük *a mátrix rangszámának*. Egy el nem tünő determináns vagy mátrix rangszáma zérus.

Megjegyezzük, hogy véges n-edrendű determináns esetében rangszámnak nem az itt bevezetett h számot szokás nevezni, hanem $(n-h)$-t.

Bebizonyítom a következő tételt:

Egy eltünő normális determináns mindig véges rangszámmal bír.

Ugyanis a 4. §. végén bebizonyított tétel értelmében egy tetszésszerinti kis positiv δ számhoz meg tudunk határozni egy n' számot úgy, hogy

$$1-\delta \leqq \left| \begin{pmatrix} 1 \; 2 \dots n \\ 1 \; 2 \dots n \end{pmatrix} \right| \leqq 1+\delta,$$

ha csak $n > n'$; ha tehát $\delta < 1$, akkor innen

$$\begin{pmatrix}1 & 2 \dots n\\ 1 & 2 \dots n\end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{ha csak} \quad n > n'.$$

Ezzel tételünk be van bizonyítva.

Definiczió: A D determináns sorairól azt mondjuk, hogy közöttük *lineár relánczió* áll fönn, ha léteznek olyan

$$c_1, c_2, \dots, c_\lambda, \dots$$

számok, a melyek nem mind tűnnek el, $\sum\limits_\lambda |c_\lambda|^2$ összetartó és

$$\sum_\lambda c_\lambda a_{\lambda k} = 0. \qquad (k=1,2,\dots)$$

Hasonló módon definiáljuk az oszlopok lineár összefüggését.

Tétel: Ha valamely normális determináns sorai (oszlopai) között lineár relánczió áll fönn, akkor a determináns eltűnik.

Ugyanis legyen $c_i \neq 0$, akkor írhatom, hogy

$$a_{ik} = \sum_\lambda c_\lambda a_{\lambda k}, \qquad \left(\substack{\lambda \neq i \\ k=1,2,\dots}\right)$$

a hol $\sum\limits_\lambda |c_\lambda|^2$ összetartó. Már most

$$D = \sum_k A_{ik} a_{ik} = \sum_k (A_{ik} \sum_\lambda c_\lambda a_{\lambda k}) = \sum_k \sum_\lambda A_{ik} c_\lambda a_{\lambda k} = \sum_\lambda (c_\lambda \sum_k A_{ik} a_{\lambda k})$$

és ezen összeg minden tagja eltűnik, mert λ mindig az i-től különböző.

A tétel inverziója is érvényes; azaz:

Ha valamely normális determináns eltűnik, akkor a sorok közt lineár relánczió áll fönn.

Tegyük föl, hogy a determináns rangszáma: 1; az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq 0$ és ha ezt az aldeterminánst szegélyezzük a D determináns első sorával és egy tetszésszerinti r-edik oszlopával ($r=1, 2, \dots$), az így nyert determináns nyilván eltűnik. Ha tehát az első oszlop szerint kifejtjük (a melylyel szegélyeztük), lesz

$$\sum_k M_k a_{kr} = 0, \qquad (r=1,2,\dots)$$

a hol M_k r-től független, $\sum\limits_k |M_k|^2$ összetartó és az M-ek közt van zérustól különböző, mert $M_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq 0$.

A bizonyitás tehát ugyanolyan menetű, mint véges determinánsok esetében és — úgy mint ott — általánosítható azon esetre, a midőn a rangszám egynél nagyobb.

A meggondolás mátrixekre is érvényes.

Tétel: Legyen $D=0$ és $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} \neq 0$ $(r>1)$, legyen továbbá $\begin{pmatrix} i'_1 \dots i'_\nu \\ k'_1 \dots k'_\nu \end{pmatrix} = 0$, ha $\nu < r$ és $(i'_1, \dots, i'_\nu)$, illetőleg $(k'_1, \dots, k'_\nu)$ az $i_1, \dots, i_r$, illetőleg $k_1, \dots, k_r$ számoknak egy tetszésszerinti ν-edosztályú kombinácziója; akkor D rangszáma: r.

Ugyanis figyelembe véve, hogy $D=0$, a (40) identitásból következik, hogy

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots a_s \\ \delta_1 \dots \delta_s \end{pmatrix} = 0,$$

ha $s=1, 2, \dots, r-1$, $(a)_s$ az $i_1, \dots, i_r$ elemeknek egy tetszésszerinti s-edosztályú kombinácziója és $(\delta)_s$ az $1, 2, \dots$ számoknak egy tetszésszerinti s-edosztályú kombinácziója.

És most a (41) identitásból következik, hogy

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots a_s \\ \delta_1 \dots \delta_s \end{pmatrix} = 0,$$

ha $s=1, 2, \dots, r-1$ és $(a)_s$, $(\delta)_s$ az $1, 2, \dots$ számok tetszésszerinti s-edosztályú kombinácziói.

A mi bebizonyitandó volt.

Ennek a tételnek és az ezen §. elején bebizonyitottnak figyelembe vételével kimondhatjuk, hogy:

Egy megadott normális determináns rangszáma végesszámú lépéssel meghatározható.

11. §. Normaloid determinánsok.

Mindeddig a normális determinánsokat tanulmányoztuk. Most a determinánsok egy általánosabb osztályát vizsgáljuk, a melyben a normális determinánsok számos tulajdonsága érvényes marad. E determinánsokat *normaloid*oknak fogjuk nevezni.

Legyen a

$$D = \underset{(i,\,k=-\infty,\dots,\infty)}{[a_{ik}]}$$

determináns a következő két feltételnek alávetve:

1. a $\prod_i a_{ii}$ szorzat feltétlenül összetartó;

2. létezik az x_i számok egy sorozata úgy, hogy ez a sor

$$\sum_i \sum_k{}_{(i\neq k)} \left| a_{ik} \frac{x_i}{x_k} \right|^2$$

összetartó, tehát úgy, hogy ez a determináns

$$\bar{D} = \underset{(i,\,k=-\infty,\dots,\infty)}{\left[a_{ik} \frac{x_i}{x_k}\right]} = [\bar{a}_{ik}]$$

normális; akkor a D determináns összetartó és értéke $\bar{D}$. Mert hiszen bármely n érték mellett

$$\underset{(i,\,k=1,2,\dots,n)}{\left[a_{ik} \frac{x_i}{x_k}\right]} = [a_{ik}].$$

Egy az 1. §-ban tett megjegyzés értelmében a következőkben oly normaloid determinánsokra szoritkozhatunk, a melyekben a sorok és oszlopok indexei 1-től ∞-ig haladnak.

Könnyen belátható, hogy

$$\overline{\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} \cdot \frac{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}}{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_r}};$$

Tehát a D normaloid determináns aldeterminánsai is összetartók.

Fejtsük ki $\bar{D}$ normális determinánst az i-edik sor elemei szerint, akkor

$$\bar{D} = \sum_k \overline{\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}} \bar{a}_{ik};$$

de az előbbiek szerint

$$\overline{\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \frac{x_k}{x_i}, \quad \bar{a}_{ik} = a_{ik} \frac{x_i}{x_k}, \quad \bar{D} = D,$$

tehát

$$D = \sum_k \binom{i}{k} a_{ik}$$

és e kifejtés feltétlenül összetartó.

Analog módon nyerjük, hogy

$$0 = \sum_k \binom{i}{k} a_{jk}. \qquad (j \neq i)$$

Hasonló módon nyerjük az általános LAPLACE-féle kifejtést.

A (19) képlet értelmében

$$\bar{D} = \bar{\Delta}_1 + \bar{\Delta}_2 + \cdots + \bar{\Delta}_m + \cdots,$$

mivel pedig

$$\bar{\Delta}_m = \Delta_m, \quad \bar{D} = D,$$

tehát nyerjük, hogy érvényes ez a kifejtés:

$$D = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_m + \cdots$$

A szorzás szabálya ebben az osztályban nem marad általános érvényben. Legyen pl. adva a következő determináns

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}$$

ez a determináns normaloid, mert ha az $x_1, x_2, \dots$ sorozat olyképen van megadva, hogy $\sum_i |x_i|^2$ összetartó, akkor $\bar{D}$ normális és értéke: 1. Ha már most a D determinánst soronként szorozzuk önmagával, a következőt nyerjük:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}$$

ez pedig széttartó.

Sőt, ha pl. a fent megadott D normaloid determinánst oszloponként szorzom a következő *normális* determinánssal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \dots \\ . & . & . & \dots \end{vmatrix}$$

akkor a szorzat-determináns kezdő eleme volna:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots$$

ez a sor pedig széttartó, itt tehát a szorzat-determináns formálisan sem létezik.

12. §. A determináns elemei egy változó függvényei.

Legyenek az a_{ik} elemek a ρ *komplex* változónak egyértékű analytikai függvényei egy R tartományban (és határán). A

$$D(\rho) = [a_{ik}(\rho)] \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\dots)}$$

végtelen determinánst *az R tartományban egyenletesen összetartó*nak nevezzük, ha egy tetszésszerinti kicsiny positiv δ számhoz meg lehet határozni egy ν számot úgy, hogy

$$|\,D_{m+\lambda}(\rho)-D_m(\rho)\,|<\delta,$$

ha csak $m>\nu$, λ minden positiv egész és ρ bármely az R tartományból vett értékére nézve.

A határértékek elméletéből következik, hogy ennek a feltételnek a teljesülése mellett $D(\rho)$ az R tartományban ρ-nak egyértékű analytikai függvénye.

Tegyük most fel, hogy az $a_{ik}(\rho)$ függvények a következő feltételnek tesznek eleget:

$$\prod_i |a_{ii}(\rho)|. \quad \sum_i \sum_k |a'_{ik}(\rho)|^2 \qquad (R)$$

egyenletesen összetartók az R tartományban.

Világos, hogy most D normális ρ-nak bármely az R-ből vett értéke mellett; de az is könnyen belátható, hogy ebben a tartományban egyenletesen összetartó, tehát analytikai függvény. Ugyanis a (18) képlet analogiájára

$$|D_{m+\lambda}(\rho)-D_m(\rho)| \leqq M\Big(\sum_{m+1}^{m+\lambda}{}^{i,k}\,|a'_{ik}(\rho)|^2+\sum_{1}^{m}{}^{i}\sum_{m+1}^{m+\lambda}{}^{k}\,|a'_{ik}(\rho)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+M'\sum_{m+1}^{m+\lambda}{}^{i}\,|a'_{ii}(\rho)|,$$

a miből a bevezetett feltétel értelmében az egyenletes összetartás következik. Az is világos most, hogy a

$$D=D_1+(D_2-D_1)+\cdots+(D_m-D_{m-1})+\cdots$$

kifejtés egyenletesen összetartó.

De nemcsak ez a kifejtés, hanem az 5. §-ban levezetett többi kifejtések is egyenletesen összetartók. Erre nézve elegendő a kifejtések azon felső határaira utalnom, melyeket a feltétlen összetartás bizonyitásánál bevezettem.

Legyen speczialis esetben

$$a'_{ik}(\rho)=\rho a'_{ik},$$

a hol a'_{ik} már ρ-tól független; legyen továbbá az

$$[a_{ik}] \qquad {\scriptstyle (i,\,k=1,\,2,\,\ldots)}$$

determináns normális; akkor az (R) feltétel bármely véges tartományban teljesül, azaz most $D(\rho)$ transcedens egész függvénye ρ-nak.[1] Legyen hatványsor alakjában:

$$D(\rho)=d_0+d_1\rho+d_2\rho^2+\cdots+d_k\rho^k+\cdots$$

czélom a d_k együttható meghatározása. Világos, hogy

$$d_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kD(\rho)}{d\rho^k}\right)_{\varrho=0};$$

---

[1] Ezen transcendens egész függvény nemére könnyen nyerek felső határt az Hadamard-féle determináns tétel alkalmazásával; ugyanis

$$|D(\rho)|^2 \leqq \prod_{1}^{\infty}{}^{i}\,[1+2\,|\rho a'_{ii}|+|\rho|^2(\sum_{k=1}^{\infty}a'_{ik}|^2)]$$
$$|D(\rho)|^2 \leqq e^{2|\varrho|\sum\limits_{i}|a'_{ii}|+|\varrho|^2\sum\limits_{i,k}|a'_{ik}|^2}$$

a honnan következik, hogy $D(\varrho)$ neme legfeljebb 2-vel egyenlő.

már most a

$$D = D_1 + (D_2 - D_1) + \cdots + (D_m - D_{m-1}) + \cdots$$

kifejtés egyenletesen összetartó, tehát akárhányszor tagonként differencziálható bármely véges tartományban, tehát még

$$\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k D(\rho)}{d\rho^k}\right)_{\rho=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k (D_m - D_{m-1})}{d\rho^k}\right]_{\rho=0} = \sum_{m=1}^{\infty} (s_m^{(k)} - s_{m-1}^{(k)}),$$

a hol

$$D_0 = 0 \quad \text{és} \quad s_m^{(k)} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k D_m}{d\rho^k}\right)_{\rho=0}.$$

De $s_m^{(k)}$ nem más, mint a D_m m-edfokú raczionális egész függvényben ρ^k együtthatója, azaz explicite felírva

$$s_m^{(k)} = \sum \sum \cdots \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m} \begin{vmatrix} a'_{i_1 i_1} & a'_{i_1 i_2} & \dots & a'_{i_1 i_k} \\ a'_{i_2 i_1} & a'_{i_2 i_2} & \dots & a'_{i_2 i_k} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a'_{i_k i_1} & a'_{i_k i_2} & \dots & a'_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

és mivel

$$d_k = \sum_{m=1}^{\infty} (s_m^{(k)} - s_{m-1}^{(k)}) = \lim_{m=\infty} s_m^{(k)},$$

tehát végül

$$d_k = \sum \sum \cdots \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \begin{vmatrix} a'_{i_1 i_1} & \dots & a'_{i_1 i_k} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ a'_{i_k i_1} & \dots & a'_{i_k i_k} \end{vmatrix} = s^{(k)},$$

és $s^{(k)}$ jelenti az $[a'_{ik}]$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$ determináns összes k-adrendű átlós aldeterminánsainak összegét.

Ezzel d_k meg van határozva

$$D(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} s^{(k)} \rho^k, \tag{42}$$

$$s^{(0)} = 1, \quad s^{(1)} = \sum_i a'_{ii}, \quad \text{stb.}$$

A (42) reláczióból nyerjük, hogy

$$D(1) = [a_{ik}]_1^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{(k)}; \tag{43}$$

ez a normális $[a_{ik}]_1^\infty$ determináns kifejtése az a'_{ik} elemek növekvő dimenziójú kifejezései szerint és a jobboldali sor feltétlenül összetartó. Ezzel az 5. §-ban adott kifejtések sorozatát kiegészítettük.

Nevezzünk valamely összetartó determinánst *feltétlenül összetartónak*, ha a soroknak egymás közötti és az oszlopoknak egymás közötti tetszésszerinti oly felcserélésénél, a melynél az átlós elemek ilyenek is maradnak, a determináns összetartó és változatlan értékű marad. Könnyen nyerem a következő tételt:

Minden normális determináns feltétlenül összetartó.

Ez rögtön következik a (43) kifejtés figyelembe vételével. Világos, hogy a mondott felcserélésnél a determináns normális tehát összetartó is marad. De értéke sem változik, mert maga az $s^{(k)}$ tag semmit sem változik.

A feltétlen összetartást a (43) előállitástól függetlenül is ki tudom mutatni; erre itt nem térek ki.

Visszatérve az általános esetre, tegyük föl, hogy az $a_{ik}(\rho)$ függvények a következő feltételnek tesznek eleget:

léteznek olyan $x_1(\rho)$, $x_2(\rho)$, ... függvények, hogy $\prod_i |a_{ii}(\rho)|$, $\sum_i \sum_k \left| a'_{ik}(\rho) \frac{x_i(\rho)}{x_k(\rho)} \right|^2$ egyenletesen összetartók az R tartományban.

Ekkor ρ bármely értéke mellett, a mely az R tartományba esik, a

$$D(\rho) = [a_{ik}(\rho)] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots)$$

determináns normaloid, tehát összetartó; de az is könnyen belátható, hogy az előbbi §-ban levezetett kifejtések most egyenletesen összetartók, tehát $D(\rho)$ az R tartományban analytikai függvény. És éppen úgy mint előbb, most nyerjük, hogy normaloid determinánsokra is érvényes ez a kifejtés

$$[a_{ik}]_1^\infty = \sum_{k=0}^\infty s^{(k)}$$

és a jobboldali sor feltétlenül összetartó.

A végtelen lineár egyenletrendszerek elméletéhez.

(Alkalmazás.)

13. §. Normális egyenletrendszer, melynek determinánsa el nem tűnik.

Legyen adva végtelen sok lineár egyenlet végtelen sok ismeretlennel:

$$u_i \equiv \sum_k a_{ik} x_k = y_i; \quad (i=1, 2, \ldots) \tag{44}$$

fölteszszük, hogy a rendszer determinánsa

$$D = [a_{ik}] \quad (i, k=1, 2, \ldots)$$

normális és hogy a $\sum_i |y_i|^2$ sor összetartó. Ekkor azt mondjuk, hogy a (44) *egyenletrendszer normális*. Kerestetik az $x_1, x_2, \ldots$ számsorozat úgy, hogy $\sum_i |x_i|^2$ összetartó legyen és a (44) egyenletrendszer ki legyen elégítve.

Legyen $D \neq 0$; a 9. §. elején végzett meggondolás analogiájára ki lehet mutatni, hogy az

$$S = \sum_i \sum_\lambda \binom{i}{k} a_{i\lambda} x_\lambda$$

sor feltétlenül összetartó a megadott feltételek mellett. Tehát írhatjuk, hogy egyrészt

$$S = \sum_i \left[\binom{i}{k} \sum_\lambda a_{i\lambda} x_\lambda \right] = \sum_i \binom{i}{k} y_i,$$

és másrészt

$$S = \sum_\lambda \left[x_\lambda \sum_i \binom{i}{k} a_{i\lambda} \right] = D x_k;$$

innen következik:

$$D x_k = \sum_i \binom{i}{k} y_i = D^{(k)}, \tag{45}$$

a hol $D^{(k)}$-val jelölöm azt a determinánst, a melyet D-ből nyerek, ha ebben a k-adik oszlop helyébe az $y_1, y_2, \ldots$ sorozatot írom. Hogy az így nyert x_k értékek a (44) rendszert tényleg kielégítik, az behelyettesítés útján rögtön evidencziába lép.

Kimutatom még, hogy a (45) alatt nyert x_k-k eleget tesznek annak a föltételnek, hogy abszolut értékeik négyzetösszege összetartó.

Ugyanis a 8. §-ban előadottak tekintetbe vételével világos, hogy

$$|D|^2 \sum_k |x_k|^2 = \sum_k |D^{(k)}|^2 = M . \overline{M},$$

a hol M-mel jelölöm az

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ y_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{vmatrix}$$

normális determinánsnak azon első mátrixét, a mely az első sor elhagyása által keletkezik és $\overline{M}$ jelenti a konjugált komplex elemekből alkotott mátrixet. Mivel $M\overline{M}$ véges szám, tehát állításunk igazolva van. Kimondhatom tehát, hogy:

Az adott föltételek mellett *a rendszernek egy és csak egy megoldása van és ezt épen úgy nyerem, mint véges egyenletrendszer esetében.*

Ha a rendszer homogén, azaz ha

$$y_i = 0, \qquad (i=1, 2, \dots)$$

akkor a (45) reláczió értelmében

$$Dx_k = 0;$$

tehát, ha $D \neq 0$, akkor *a homogén egyenletrendszernek a triviális megoldáson kívül más megoldása nincs.*

14. §. Az egyenletrendszer determinánsa zérus értékű.

Tegyük föl, hogy

$$D = 0$$

és rangszáma r és hogy a rendszer inhomogén. Legyen D-nek egy r-edik, a zérustól különböző aldeterminánsa

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}.$$

Kimutatom, hogy ekkor az $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_r}$ kifejezések a többi u_i-k homogén lineár függvényei.

Ugyanis a 9. §. fejtegetéseinek analogiájára ki lehet mutatni, hogy az

$$S_\nu = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 \dots i_{\nu-1}\; m\; i_{\nu+1} \dots i_r \\ k_1 \dots k_{\nu-1}\; k_\nu\; k_{\nu+1} \dots k_r \end{pmatrix} a_{m\lambda} x_\lambda$$

sor feltétlenül összetartó; tehát irhatom, hogy egyrészt

$$S_\nu = \sum_m \left\{ \begin{pmatrix} i_1 \dots m \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} \sum_\lambda a_{m\lambda} x_\lambda \right\} = \sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots m \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} u_m,$$

és másrészt

$$S_\nu = \sum_\lambda \left\{ x_\lambda \sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots m \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} a_{m\lambda} \right\}.$$

De az utóbbi kifejezésben a belső összeg mindenkor zérus értékű; ha λ a $k_1, \dots, k_r$ számoktól különböző, akkor azért, mert a szóban levő összeg egy oly determináns kifejtése, melynek két oszlopa egymással megegyezik; ha pedig λ jelenti a $k_1, \dots, k_r$ számok egyikét, akkor az összeg egy $r-1$-edrendű aldetermináns kifejtése, tehát *feltételünk* értelmében zérus. Ennek folytán

$$S_\nu = \sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots m \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} u_m = 0.$$

A baloldali összegben

$$u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{\nu-1}}, u_{i_{\nu+1}}, \dots, u_{i_r}$$

együtthatói mindannyian eltűnnek; ellenben u_{i_ν} együtthatója feltételünk értelmében a zérustól különböző, tehát

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\nu \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} u_{i_\nu} = -\sum_{\substack{m \\ (m \neq i_1, \dots, i_r)}} \begin{pmatrix} i_1 \dots m \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} u_m; \qquad (46)$$
$$(\nu = 1, 2, \dots, r)$$

és $\sum_m \left| \begin{pmatrix} i_1 \dots m \dots i_r \\ k_1 \dots k_\nu \dots k_r \end{pmatrix} \right|^2$ összetartó.

Ezzel ki van mutatva, hogy $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ mindegyike a többi u_i-k homogén lineár függvénye.

Világos, hogy az egyenletrendszernek csak úgy lehet megoldása, ha az u_i-ik közt fönnálló (46) relácziók az y_i-k közt is fönnállnak, mert ellenkező esetben az egyenletek egymásnak ellentmondanak.

Föltéve, hogy a megoldhatóság eme szükséges feltételei teljesülnek, világos, hogy az

$$u_{i_\nu} = y_{i_\nu} \qquad {\scriptstyle (\nu=1, 2, \dots, r)}$$

egyenletek a többiek következményei, tehát feleslegesek.

A megoldást most könnyen fölírhatjuk. Az

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 i_2 \dots i_r\ m \\ k_1 k_2 \dots k_r\ k \end{pmatrix} a_{m\lambda} x_\lambda$$

sor feltétlenül összetartó; tehát egyrészt

$$S = \sum_m \left\{ \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r\ m \\ k_1 \dots k_r\ k \end{pmatrix} \sum_\lambda a_{m\lambda} x_\lambda \right\} = \sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r\ m \\ k_1 \dots k_r\ k \end{pmatrix} y_m,$$

és másrészt

$$S = \sum_\lambda \left\{ x_\lambda \sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r\ m \\ k_1 \dots k_r\ k \end{pmatrix} a_{m\lambda} \right\}$$

és a 9. §. (37) relácziójának figyelembe vételével továbbá

$$S = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} x_k - \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k \dots k_r \end{pmatrix} x_{k_1} - \dots - \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k \end{pmatrix} x_{k_r},$$

úgy hogy tehát

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} x_k = \sum_{\substack{m \\ (m \neq i_1, \dots, i_r)}} \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r\ m \\ k_1 \dots k_r\ k \end{pmatrix} y_m +$$

$$+ \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k \dots k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \dots + \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k \end{pmatrix} x_{k_r}. \qquad (47)$$

Az x_k-k ezen rendszere r-szeresen határozatlan és az egyenletek ily x_k-k által ki vannak elégitve. Ha ugyanis a (47) alatti kifejezéseket behelyettesitem, pl. az i-edik egyenletbe, lesz

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix} \sum_k a_{ik} x_k = \sum_k \left\{ a_{ik} \sum_m \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r\ m \\ k_1 \dots k_r\ k \end{pmatrix} y_m \right\} + \cdots$$

a jobboldali kifejezés többi tagjai eltűnnek. De a jobboldali összeg így írható:

$$\sum_m \left\{ y_m \sum_k \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r\ m \\ k_1 \dots k_r\ k \end{pmatrix} a_{ik} \right\} = y_i \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix},$$

mert a belső összeg minden m érték mellett zérus, kivéve, ha $m = i$, a mikor is értéke $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$. Tehát a megadott egyenletek ki vannak elégitve.

Tehát a levezetett föltételek szükségesek és elegendők arra, hogy a rendszer megoldható legyen és a megoldás r-szeresen határozatlan.

Világos, hogy most is a megoldás olyan, hogy az ismeretlenek absolut értékeinek négyzetösszege összetartó.

Ha az y-ok mindegyike eltűnik, azaz a rendszer homogén, akkor is r ismeretlen határozatlan marad és a többiek ezeknek lineár függvényei. De ebben az esetben az egyenletek nem lehetnek egymásnak ellentmondók.

A megoldhatóságnak imént adott szükséges és elegendő feltétele még más alakban fejezhető ki.

Töröljük D-ben az $i_1, \dots, i_r$ indexű sorokat és a $k_1, \dots, k_r$ indexű oszlopokat; az így nyert aldeterminást szegélyezzük az y-ok oszlopával és a D determináns valamely i-edik sorával (a $k_1, \dots, k_r$ illetőleg $i_1, \dots, i_r$ indexű elemek kihagyásával). Az így nyert $\Delta_{r-1}^{(i)}$ determináns zérus értékű, bármilyen értéket jelentsen i. Mert ha i az $i_1, i_2, \dots, i_r$ értékektől különbözik, akkor a determinánsban két sor egymással megegyezik, ha pedig i az $i_1, \dots, i_r$ értékek egyikével egyenlő, akkor $\Delta_{r-1}^{(i)}$-t az első oszlop szerint kifejtve és zérussal egyenlővé téve, nyerjük épen azon relácziókat az y-ok közt, a melyeknek teljesülése a rendszer megoldhatóságának kriteriuma. Tehát mindenkor $\Delta_{r-1}^{(i)} = 0$.

De fordítva is, abból, hogy az összes $\Delta_{r-1}^{(i)}$ determinánsok eltünnek, következik, hogy r egyenlet a többiek következménye és hogy a rendszer megoldható. Tehát:

A $\Delta_{r-1}^{(i)} = 0$ $(i=1, 2, \ldots)$ relácziók szükségesek és elegendők ahhoz, hogy az adott egyenletrendszer megoldható legyen és a megoldás r-szeresen határozatlan legyen.

Ezt a kriteriumot még transformálhatom:

Az

$$M = \left\| \begin{matrix} y_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{matrix} \right\|$$

normális első mátrix rangja a megadott föltételek mellett épen r, mert a mátrix $r-1$ sora a többiek homogén lineár függvénye, tehát rangja nem lehet r-nél kisebb; de ha az első oszlopot elhagyom, a D determinánst nyerem, a mely feltevés szerint r-edrangú; tehát M rangszáma r.

Fordítva is, ha az M mátrix rangszáma r, akkor nyilván

$$\Delta_{r-1}^{(i)} = 0. \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

Tehát az M mátrix felhasználásával kimondhatjuk ezt a tételt:

Hogy az adott egyenletrendszer megoldható legyen, ahhoz szükséges és elegendő, hogy a D determináns és az M mátrix ugyanazzal a rangszámmal bírjanak.

15. §. Normaloid egyenletrendszerek.

Tegyük föl, hogy a

$$\sum_k a_{ik} x_k = y_i \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{48}$$

egyenletrendszer a következő feltételeknek tesz eleget: létezik olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ számsorozat, hogy a

$$D = \left[a_{ik} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} \right] \qquad (i, k=1, 2, \ldots)$$

determináns normális és hogy $\sum_i |a_i y_i|^2$ összetartó; ekkor azt mondjuk, hogy (48) egy *normaloid egyenletrendszer*.

A (48) rendszer megoldását vissza tudjuk vezetni egy normális rendszer megoldására, a melynek determinánsa D.

Bevezetünk új ismeretleneket:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$$

a következő relácziók által:

$$x_k = \frac{\xi_k}{a_k} \qquad (k=1,2,\ldots)$$

és az i-edik egyenlet mindkét oldalát szorozzuk a_i-vel; akkor erre a rendszerre jutunk:

$$\sum_k a_{ik} \frac{a_i}{a_k} \xi_k = a_i y_i,$$

a mely nyilván normális, tehát meg tudjuk oldani. Ha egy megoldása:

$$\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_k, \ldots$$

és $\sum_i |\xi'_i|^2$ összetartó, akkor a (48) egyenletrendszer megfelelő megoldása

$$x'_1 = \frac{\xi'_1}{a_1}, \quad x'_2 = \frac{\xi'_2}{a_2}, \ldots, x'_k = \frac{\xi'_k}{a_k}, \ldots$$

és

$$\sum_i |a_i x'_i|^2 \text{ összetartó.}$$

A lineár integrálegyenletek elméletéhez.

(Alkalmazás.)

16. §. Másodfajú lineár integrálegyenletek.

Legyen adva a következő függvényegyenlet:

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{49}$$

a melyben $K(s, t)$ az s, t változóknak megadott, az (a, b) intervallumban folytonos függvénye, úgyszintén $f(s)$ megadott folytonos függvény, a mely nem tűnik el az intervallum minden helyén; $\varphi(s)$ meghatározandó mint folytonos függvény úgy, hogy a (49) egyenlet ki legyen elégítve. Ezt az egyenletet *másodfajú lineár integrálegyenlet*nek nevezzük; $K(s, t)$-t nevezzük az egyenlet *integrálmag*jának. Az egyenlet megoldását HILBERT[1] egy végtelen lineár egyenletrendszer megoldására vezette vissza következőképen:

megállapitja a folytonos valós függvények egy végtelen sorozatát:

$$\Phi_1(s),\ \Phi_2(s), \ldots, \Phi_p(s), \ldots \tag{50}$$

a melyek a következő feltételeknek tesznek eleget:

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad \int_a^b \Phi_p(s)\,\Phi_q(s)\,ds = 0, \\ & \int_a^b (\Phi_p(s))^2 ds = 1; \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

2. bármely $u(s)$, $v(s)$ folytonos függvényekre érvényes legyen ez a reláczió:

$$\int_a^b u(s)\,v(s)\,ds = \int_a^b u(s)\,\Phi_1(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\Phi_1(s)\,ds + \\ + \int_a^b u(s)\,\Phi_2(s)\,ds \int_a^b v(s)\,\Phi_2(s)\,ds + \cdots \tag{52}$$

Az (50) függvénysorozatot *teljes orthogonális függvényrendszer*nek nevezzük; az

$$\int_a^b u(s)\,\Phi_p(s)\,ds$$

kifejezést *az $u(s)$ függvény p-edik* FOURIER-*féle együtthatójá*nak nevezzük vonatkoztatva az (50) függvényrendszerre.

Legyen most

[1] Loc. cit. Fünfte Mitteilung.

$$a_{pq} = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\,\Phi_p(s)\,\Phi_q(t)\,ds\,dt,$$

$$a_p = \int_a^b f(s)\,\Phi_p(s)\,ds$$

és felírjuk a következő végtelen lineár egyenletrendszert:

$$x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots = a_p \qquad (53)$$
$$(p=1,2,\ldots)$$

Hilbert kimutatta a következőt:

Ha az (53) egyenletrendszer megoldása

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_p,\ldots,$$

akkor létezik oly folytonos $\varphi(s)$ függvény, a mely a (49) egyenletet kielégíti és e függvény Fourier-féle együtthatói épen $a_1, a_2, \ldots$ és fordítva is, ha $\varphi(s)$ a (49) egyenletet kielégíti, akkor az ő Fourier-féle együtthatói kielégítik az (53) alatti lineár egyenletrendszert.

Elegendő tehát az (53) rendszerrel foglalkoznunk. Könnyű kimutatni, hogy

$$\sum_{p,q} a_{pq}^2 \leq \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 ds\,dt,$$

$$\sum_p a_p^2 = \int_a^b (f(s))^2 ds.$$

De $\sum\limits_p |a_{pp}|$ általában nem összetartó, ezért az (53) rendszer általában nem tartozik az előbbi §-ban tárgyaltak közé; azonban ilyenné könnyen átalakítható. Ugyanis világos, hogy

$$\lim_{p=\infty} a_{pp} = 0,$$

ha tehát ω egy 1-nél kisebb positiv szám, akkor valamely l indextől kezdve

$$1 + a_{ll} > \omega,\quad 1 + a_{l+1,l+} > \omega, \ldots;$$

már most, ha $p \geqq l$, akkor a p-edik egyenlet mindkét oldalát osztom $1+a_{pp}$-vel; legyen az így átalakított egyenletrendszer

$$x_p + a'_{p1}x_1 + a'_{p2}x_2 + a'_{p,\,p-1}x_{p-1} + a'_{p,\,p+1}x_{p+1} + \cdots = a'_p. \atop (p=1,2,\ldots)$$

Ez már normális rendszer, tehát alkalmazhatjuk a 13. és 14. §-ban nyert eredményeket. Azaz, ha $D \neq 0$, akkor egy és csak egy megoldás van és ez

$$x_p = \frac{D^{(p)}}{D}, \qquad (p=1,2,\ldots)$$

avagy

$$x_p = \lim_{n=\infty} \frac{D_n^{(p)}}{D_n}.$$

De mivel nyilván

$$\frac{D_n^{(p)}}{D_n} = \frac{\Delta_n^{(p)}}{\Delta_n},$$

a hol Δ_n, $\Delta_n^{(p)}$ az

$$x_p + a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pn}x_n = a_p \atop (p=1,2,\ldots,n) \tag{54}$$

egyenletrendszerhez tartozó analog determinánsok, tehát

$$x_p = \lim_{n=\infty} \frac{\Delta_n^{(p)}}{\Delta_n} = \lim_{n=\infty} x_p^{(n)},$$

a hol

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$$

az (54) rendszer megoldása ($\Delta_n \neq 0$, ha csak n elég nagy). Nevezzük röviden (54)-t az (53) *n-edik közelítő rendszerének*, akkor tehát mondhatjuk, hogy az (53) egyenletrendszer megoldását a közelítő rendszerek megoldásainak határhelyei alkotják.

Hasonlóan tárgyalhatjuk a 13. és 14. §. többi eshetőségeit. Az (54)-nek megfelelő homogén egyenletrendszer és a

$$0 = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

homogén integrálegyenlet megoldásai analog kapcsolatban vannak egymással, mint (54) és (49) megoldásai.

Ezen fejtegetések általánosíthatók arra az esetre, hogy az integrálegyenletben szereplő függvények a valós változóknak *komplex* értékű függvényei. Ha részletesen

$$f(s)=f_1(s)+if_2(s),\quad \varphi(s)=\varphi_1(s)+i\varphi_2(s),\quad K(s,t)=K_1(s,t)+iK_2(s,t),$$

akkor az integrálegyenlet a következő két egyenletből álló rendszerrel equivalens

$$f_1(s)=\varphi_1(s)+\int_a^b\big(K_1(s,t)\,\varphi_1(t)-K_2(s,t)\,\varphi_2(t)\big)\,dt,$$

$$f_2(s)=\varphi_2(s)+\int_a^b\big(K_1(s,t)\,\varphi_2(t)+K_2(s,t)\,\varphi_1(t)\big)\,dt,$$

a hol a függvények valósak.

Az integrálegyenlet megoldása most egy komplex együtthatójú végtelen lineár egyenletrendszer megoldására vezethető vissza, ugyanolyan módon, mint valós függvények esetében. Alapul veszszük *a komplex értékű folytonos függvényeknek egy teljes orthogonális rendszerét*

$$\Psi_1(s),\ \Psi_2(s),\ldots,\ \Psi_p(s),\ldots$$

a mi alatt azt értjük, hogy e függvényrendszer a következő feltételeknek tesz eleget:

$$1.\qquad \int_a^b \Psi_p(s)\,\overline{\Psi_q(s)}\,ds=0,\quad (p\neq q)$$

$$\int_a^b \Psi_p(s)\,\overline{\Psi_p(s)}\,ds=1;\qquad (55_1)$$

2. bármely $u(s)$, $v(s)$ komplex értékű folytonos függvényekre érvényes legyen ez a reláczió:

$$\int_a^b u(s)\,v(s)\,ds=\int_a^b u(s)\,\Psi_1(s)\,ds\int_a^b v(s)\,\overline{\Psi_1(s)}\,ds+$$

$$+\int_a^b u(s)\,\Psi_2(s)\,ds\int_a^b v(s)\,\overline{\Psi_2(s)}\,ds+\cdots\qquad (55_2)$$

(Könnyen igazolható, hogy az (50) függvénysorozat is e feltételeknek eleget tesz.)

Legyen

$$\int_a^b K(s,t)\,\Psi_q(t)\,dt = k_q(s),$$

$$\int_a^b k_q(s)\,\overline{\Psi_p(s)}\,ds = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\Psi_q(t)\,\overline{\Psi_p(s)}\,dtds = a_{pq};$$

(55_2)-ből egyrészt

$$\int_a^b K(s,t)\,\overline{K(s,t)}\,dt = \sum_q k_q(s)\,\overline{k_q(s)} \tag{56}$$

és másrészt

$$\int_a^b \overline{k_q(s)}\,k_q(s)\,ds = \overline{a_{1q}}\,a_{1q} + \overline{a_{2q}}\,a_{2q} + \cdots \tag{57}$$

(56) és (57)-ből következik

$$\sum_{p,q} a_{pq}\,\overline{a_{pq}} \leqq \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,\overline{K(s,t)}\,dsdt.$$

Ha még

$$\int_a^b f(s)\,\overline{\Psi_p(s)}\,ds = a_p,$$

akkor (55_2)-ből

$$\int_a^b \overline{f(s)}\,f(s)\,ds = \bar{a}_1 a_1 + \bar{a}_2 a_2 + \cdots$$

Hilbert idézett dolgozatának nyomán könnyen ki lehet mutatni hogy most is, ha az

$$x_p + a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots = a_p \qquad (p=1,2,\ldots) \tag{58}$$

egyenletrendszer megoldása

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$$

és ha

$$\alpha(s) = \alpha_1 k_1(s) + \alpha_2 k_2(s) + \cdots$$

és

$$\varphi(s) = f(s) - \alpha(s),$$

akkor

$$a_p = \int_a^b \varphi(s) \overline{\Psi_p(s)}\, ds;$$

és $\varphi(s)$ az integrálegyenlet megoldása, mert (55_2)-ből

$$\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt = k_1(s)\,.\,a_1 + k_2(s)\,.\,a_2 + \cdots = f(s) - \varphi(s). \quad (59)$$

És fordítva, ha $\varphi(s)$ az integrálegyenlet megoldása és

$$a_p = \int_a^b \varphi(s) \overline{\Psi_p(s)}\, ds,$$

akkor (55_2)-ből nyerem (59)-et és ezt $\overline{\Psi_p}(s)$-sal szorozva és integrálva, ered

$$a_1 a_{p1} + a_2 a_{p2} + \cdots = a_p - a_p;$$

tehát $a_1, a_2, \ldots$ az (58) egyenletrendszer megoldása.

Úgy, hogy most az (58) lineár egyenletrendszer megoldása az integrálegyenlet megoldásával egyértelmű.

Komplex magú integrálegyenletek például a differencziálegyenletek bizonyos RIEMANN által felvetett problémáiban merülnek föl.[1]

17. §. Az exisztenczia-tétel.

A másodfajú lineár homogén integrálegyenlet általános alakja

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\, dt;$$

azokat a λ értékeket, a melyek mellett ezen egyenletnek van 0-tól különböző megoldása, *a $K(s, t)$ integrálmaghoz tartozó sajátos értékek*nek és a megfelelő megoldásokat az ehhez az integrálmaghoz tartozó *sajátos függvények*nek nevezzük.

Legyenek a szóban levő függvények valósak és legyen $K(s, t)$ symmetrikus, azaz

[1] V. ö. HILBERT: Dritte Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1905.

$$K(s, t) = K(t, s);$$

bebizonyítom, hogy *ekkor létezik sajátos érték.*[1]

Elegendő e tételt a következő homogén lineár integrálegyenletről kimutatnom:

$$0 = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K^2(s, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{60}$$

a hol

$$K^2(s, t) = \int_a^b K(s, r)\, K(r, t)\, dr,$$

mert ha λ_1 egy sajátos érték, a mely $K^2(s, t)$-hez tartozik, akkor — miként ismeretes — $\lambda_1^{\frac{1}{2}}$ egy sajátos érték, a mely $K(s, t)$-hez tartozik.

Először is kimutatom, hogy *a* (60) *integrálegyenlethez tartozó lineár egyenletrendszer normális.*

Ugyanis

$$c_{pq} = \int_a^b \int_a^b K^2(s, t)\, \Phi_p(s)\, \Phi_q(t)\, ds dt =$$
$$= \int_a^b \Big[\int_a^b K(s, r)\, \Phi_p(s)\, ds \int_a^b K(r, t)\, \Phi_q(t)\, dt \Big] dr;$$

ha most (52)-ben ezt a helyettesítést végezzük:

$$u(r) = \int_a^b K(s, r)\, \Phi_p(s)\, ds, \quad v(r) = \int_a^b K(r, t)\, \Phi_q(t)\, dt,$$

akkor nyerjük, hogy

$$c_{pq} = a_{p1} a_{1q} + a_{p2} a_{2q} + \cdots,$$

a hol

$$a_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\, \Phi_i(s)\, \Phi_k(t)\, ds dt,$$

azaz — a mátrixelmélet terminologiája szerint — a $\{c_{pq}\}$ mátrix az $\{a_{pq}\}$ mátrix négyzete.

Már most a (17) egyenlőtlenség alkalmazásával egyrészt

---

[1] Analog meggondolás érvényes arra az esetre, ha a szóban levő függvények komplex értékűek és $K(s, t) = \overline{K(t, s)}$.

$$|c_{pp}| \leqq (\sum_n |a_{pn}|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_n |a_{np}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

és még

$$\sum_p |c_{pp}| \leqq \sum_{n,p} |a_{pn}|^2 \leqq \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 ds dt;$$

és másrészt

$$c_{pq}^2 \leqq (\sum_n a_{pn}^2)(\sum_n a_{nq}^2),$$

$$\sum_{p,q} c_{pq}^2 \leqq (\sum_{p,n} a_{pn}^2)(\sum_{q,n} a_{nq}^2) \leqq \left(\int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 ds dt\right)^2.$$

Ezzel ki van mutatva, hogy a

$$D(\lambda) = [\delta_{pq} - \lambda c_{pq}]_1^\infty \qquad \delta_{pq} = \begin{cases} 1 & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

determináns normális.

Világos, hogy a $K^2(s, t)$ integrálmaghoz tartozó sajátos értékek épen a $D(\lambda)$ függvény zérushelyei; ez transczendens egész függvény.

Ha $K(s, t) = K(t, s)$, akkor $c_{pq} = c_{qp}$ és $D(\lambda)$ zérushelyei mind positivek.

Ugyanis $D_n(\lambda)$ egyenletesen tart $D(\lambda)$-hoz, ezért $D(\lambda)$ zérushelyei a $D_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvények zérushelyeinek sűrűsödési pontjai; már pedig tudvalevő, hogy $D_n(\lambda)$ zérushelyei mind valós és positiv értékek.

Legyenek $D_n(\lambda)$ zérushelyei

$$\lambda_{1n}, \lambda_{2n}, \ldots, \lambda_{nn},$$

akkor van oly orthogonális transformáczió, a melynek felhasználásával a

$$C_n = \sum_{p,q=1}^{n} c_{pq} x_p x_q$$

quadratikus forma ily alakra hozható:

$$\frac{x_1^2}{\lambda_{1n}^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{\lambda_{nn}^2},$$

ha tehát $D_n(\lambda)$ zérushelyei közül a legkisebbiket λ_n-nel jelölöm, akkor nyilván $\frac{1}{\lambda_n} C_n$-nek maximuma az

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

föltétel mellett; és ha most hasonlóan C_{n+1}-hez meghatározom λ_{n+1}-t, akkor $\frac{1}{\lambda_{n+1}} \geqq \frac{1}{\lambda_n}$, mert C_n értékrendszere benne van C_{n+1} értékrendszerében; tehát

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

sohasem növekvő sorozata a positiv számoknak, tehát szabályos és ha határértéke λ', akkor

$$D(\lambda') = 0.$$

Tételünk be van bizonyítva.

A 16. és 17. §-ok fejtegetései mind érvényben maradnak, ha csak a szereplő függvények absolut értékeinek négyzetei integrabilisek LEBESGUE-féle értelemben.

Szász Ottó.

SZÁMELMÉLETI APRÓSÁGOK.

1. *A dekadikus számrëndszerben*

$$12 = 3 . 4 \qquad 56 = 7 . 8.$$

Kérdés, hogy más számrendszerben négy szomszédos számjegy közt áll-e fenn hasonló egyenlet?

A feleletet az

$$ab + a + 1 = (a+2)(a+3)$$

egyenlet egész számú megoldásai adják meg.

$$ab = a^2 + 4a + 5.$$

Tehát a osztója 5-nek.

Így

$$a = 1 \text{ vagy } 5 \quad b = 10.$$

Tehát más számrendszerben hasonló egyenlet nincs.

2. Ugyancsak a dekadikus számrendszerben

$$24 = 4 . 6 \qquad 35 = 5 . 7.$$

Hasonló egyenletet ad az

$$ab + a + 2 = (a+2)(a+4)$$

egyenlet bármely egész számú megoldása.

$$ab = a^2 + 5a + 6.$$

Tehát a osztója 6-nak.

Így a megoldások:

$$a = 1, 6 \quad b = 12$$
$$a = 2, 3 \quad b = 10.$$

Tehát a fennebbi egyenletekhez hasonló van még kettő a 12 alapszámú számrendszerben és pedig

$$(1,\ 3)_{12} = 3 . 5 \quad (6,\ 8)_{12} = 8 . 10.$$

Ha $(c,\ d)_b$ a b alapszámú számrendszerben azt a két számjegyű számot jelenti, melynek számképe cd.

3. Keressük még fel az

$$ab+a+2 = (a+4)\ (a+6)$$

egyenlet egész számú megoldásait.

$$ab = a^2+9a+22.$$

Tehát a osztója 22-nek.

Így a megoldások:

$$a = 1,\ 22, \qquad b = 32$$
$$a = 2,\ 11 \qquad b = 22.$$

A 32 alapszámú számrendszerben:

$$(1,\ 3)_{32} = 5 . 7$$
$$(22,\ 24)_{32} = 26 . 28.$$

A 22 alapszámú számrendszerben:

$$(2,\ 4)_{22} = 6 . 8$$
$$(11,\ 13)_{22} = 15 . 17.$$

Más számrendszerben hasonló egyenletek nincsenek.

4. Végül megemlítem, hogy az

$$(1.\ 3)_5 = 2 . 4$$

egyenlethez hasonló semmi más számrendszerben nincs.

Vályi Gyula.

ADALÉKOK A FEKETE SUGÁRZÁS KONSTITUTIÓJÁNAK KÉRDÉSÉHEZ.

Előszó.

A jelen értekezés a fekete sugárzás szerkezetének kérdéséhez akar hozzászólani. Ez a probléma ma az általános érdeklődés középpontjában áll, mivel nemcsak a fizikának, hanem a modern theoretikus chemiának is számtalan kérdését érinti. Fontos különösen azért, mivel szoros összefüggésben áll részben az anyag, részben pedig a fényæther szerkezetének ma még nagyon homályos kérdésével.

Dolgozatunkban czélunk egy sejtelmünket némileg igazolni, hogy a sugárzás, a fény szerkezete nem egészen olyan, mint azt az elektromágneses hullámelmélet megállapítja, hanem valószinűleg valami diskontinuitást mutat fel.

Az értekezés első részében általános tájékoztatást kívánunk nyújtani röviden a sugárzás kérdéséről. A második részben kiindúlva az Einstein-féle energiaingadozások elméletéből azt iparkodunk megmutatni, hogy mint vezet a fényquantumtheória a csak partiálisan érvényes Wien-féle sugárzási törvényre. Végül megmutatjuk a fényquantumtheória egy modifikatióját, a mely az általános érvényességű Planck-féle formulát eredményezi. Nem azt akarjuk evvel állítani, hogy az Einstein-féle fényquantumtheóriának hivei vagyunk, hanem elsősorban azt bemutatni, hogy a fekete sugárzás helyesnek elismert Planck-féle formulája minden materialis (resonator stb.) theória nélkül is előállítható, másodsorban pedig a probléma megoldási lehetőségének egy új irányát kijelölni.

Legvégül megmutatjuk, hogy a szigoruan értelmezett régi Planck-féle theória a sugárzás konstitutiójában szintén diskontinuitásokat eredményez, melyek azonban eltérők a fényquantumtheóriától.

I. A fekete sugárzás kérdéséről általában.

Egy egyenletesen temperált üregben, melynek falai véges absorptióképességgel birnak és tökéletesen hőáthatatlanok, mindenkor egy oly sugárzási állapot áll elő, mely összes észlelhető tulajdonságait tekintve, független az üreg falának mineműségétől, csupán ennek T temperaturájától függ. Mint Kirchhoff kimutatta, az ilyen sugárzás, spektralis eloszlását tekintve, azonos egy oly test sugárzásával, melynek absorptióképessége (beeső energiamennyiség viszonya az elnyelthez) az egység. Az ily tulajdonsággal rendelkező testet fekete testnek, sugárzását pedig s vele az üregsugárzást *absolut fekete sugárzásnak mondjuk;* értekezésünkben röviden sugárzás alatt mindig ily sugárzást szándékozunk érteni. Ha a sugárzás spektrális eloszlását vizsgáljuk, vagyis azon energiamennyiséget, mely egy megállapitott sugárzási energiamennyiségből ν és $\nu+d\nu$ frequentiák[1] közé esik, akkor azt találjuk, hogy ez az energiamennyiség arányos a $d\nu$ intervallummal és csupán ν és T-nek függvénye. Ezen energiamennyiséget tehát sugárzó fekete felületnél a specifikus intenzitás $\mathfrak{K}d\nu$ (a felületegységről merőlegesen a térszög egységében az időegység alatt kiáramló energia), az üregsugárzás esetében pedig az energiasűrűség $\rho d\nu$ (a térfogategységben foglalt energiamennyiség) méri. A kettő közt az összefüggést Planck[2] adta meg

$$\rho = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{K} \tag{1}$$

fénysebességet jelenti.

[1] Frequentia = egy másodpercz alatt végzett rezgések száma.

[2] L. Planck: Theorie d. Wärmestrahlung. Verl. v. Barth. 23. lap 24. formula.

A feladattal, a

$$\rho d\nu = f(T, \nu)\, d\nu$$

függvényt megtalálni, mely az energiasűrűség függését fejezi ki a temperaturától és a frequentiától, sokan foglalkoztak. Még 1900-ban előállított RAYLEIGH[1] a $\mathfrak{K}$ specifikus intenzitásra egy formulát,

$$\mathfrak{K} = \frac{k\nu^2 T}{c^2}, \tag{2}$$

hol k az ismeretes gázconstans

$$k = \frac{R}{N} = 1{\cdot}35 \,.\, 10^{-16} \frac{\text{erg.}}{\text{grad.}}\,^{2}$$

(R az absolut gázállandó, N egy mól súlyban foglalt molekulák száma.) Ezen törvényt, mely a k gázkonstans révén a sugárzás theóriáját a gázelmélettel hozza összefüggésbe, még JEANS,[3] majd LORENTZ[4] is levezették. Előbbi a statisztikus mechanika egy tételével (egyenletes energiaeloszlás elve), az utóbbi pedig a fémek elektrontheóriájának elméletéből. A tapasztalat azt mutatta, hogy a formula csak alacsony ν és magas T értékekre érvényes (röviden, ha $\frac{\nu}{T}$ érték igen kicsiny).

Jóval ezek előtt még W. WIEN[5] állitott elő egy sugárzási törvényt gázelméleti és thermodynamikai alapon

$$\mathfrak{K} = \frac{h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \tag{3}$$

mely a k univerzális constanson kívül még egyet tartalmaz.[6]

---

1 L. lord RAYLEIGH: Phil. Mag. 1900. 49. 579. oldal.

2 L. PLANCK: fentebbi 162. oldal, 256. egyenlet.

3 L. Phil. Mag. 10. 1905. 91. oldal.

4 H. A. LORENTZ: Proc. Kon. Akad. v. WET. Amsterdam, 1903. 666. old., továbbá J. J. THOMSON: Korpuskulartheorie d. Materie.

5 W. WIEN: Wied. Ann. 1896. 58., 662. oldal.

6 A constansok ott nem ilyen formában vannak.

A kisérletek ezt a törvényt is csak részlegesen igazolták, t. i. $\frac{\nu}{T}$ magas értékeire.

Végül MAX PLANCK[1] készített egy formulát, melyet RUBENS, KURLBAUM, majd PASCHEN mérései a legfényesebb módon igazolták. Minthogy e sugárzási törvény alapelveire többször történik hivatkozás, egész röviden szándékozom ismertetni.

A sugárzásban az emissió és absorptió műveletét, vagy más szóval az energiaközvetítést az anyag és az æther közt az elektromágneses dipol végzi. Egy ily dipol két egyenlő nagyságú, de ellenkező jelű töltésű elektronból képzelhető el a legegyszerűbben, melyek az anyag (pl. molekula) egy pontjához vannak quasielasztikus erőkkel fixálva.[2] Ily elektromágneses modell képes az egyensúlyi helyzete körül periodikus rezgéseket végezni. Minden dipolnak van egy bizonyos «ν» frequentiája. PLANCK azt a megszorítást teszi a dipol tulajdonságait illetőleg, hogy a csillapodási tényező, mely az elektrodynamika tanának szükségszerű következménye, igen kicsiny legyen az egységhez. Ezzel eléri, hogy egy stationarius sugárzásnak kitett dipol, melyet ilyenkor *resonatornak* nevezünk, a ráeső sugárzásnak csak egy oly igen kis frequentia intervallumára resonál, melynek frequentiája a resonator saját frequentiájához igen közel van. A resonator tehát ezen intervallumból és csak ebből, absorbeál energiát. Minthogy azonban a csillapodási dekrementum, a mely a rezgés differentiálegyenletéből közvetlen adódik, nem nulla, a resonator folytonosan energiát is veszít, a mely átmegy a sugárzásba. PLANCK kimutatja, hogy $\mathfrak{K}_\nu$ intenzitású stationarius sugárzás terében az idő folyamán a resonator oly U_ν energiát fog elérni, más szóval egy oly U_ν energiájú egyen-

---

[1] Az előállítási mód legvilágosabban van a már említett PLANCK-féle «Theorie d. W. strahlung»-ban közölve.

[2] Egyszerűbb a kép, ha csak a negativ elektront képzeljük az egyensúlyi helyzetből mozoghatónak.

súlyi állapothoz fog közeledni, a mely a $\mathfrak{K}_\nu$ specifikus (ν frequentiához tartozó) intenzitással következőkép függ össze:

$$U_\nu = \frac{c^2}{\nu^2} \mathfrak{K}_\nu. \qquad (I)$$

Ez volna a conclusiója a PLANCK-féle theoria elektrodynamikus részének.

A kérdés további tárgyalása már tisztán thermodynamikai jellegű. A sugárzás nemcsak energiával, hanem, mivel az emittáló test hőtartalmának rovására történik, bizonyos entropiával s ennek révén temperaturával is bír. PLANCK alapelve, hogy a fekete üregsugárzás az összes ugyanazon energia mellett fennálló sugárzások közt a legstabilisabb, vagy, a mi ugyanaz, maximális entropiával bír. Ez utóbbi kijelentés, ha a BOLTZMANN-féle kinetikus entropia definitiót tekintjük, még úgy is fogalmazható, hogy a fekete sugárzás bír az összes, adott energia mellett fennálló sugárzások közt oly spektrális eloszlással, a mely a *legvalószinűbb.* Hasonlíthatjuk a fekete üregsugárzást pl. egy adott T temperaturán lévő gáz állapotához. A mint lehetséges a gáz molekulái közt bizonyos sebességi eloszlás, úgy lehetséges egy adott spektrális eloszlás a sugárzásnál. Thermodynamikus egyensúly esetén az előbbinél a MAXWELL-féle, az utóbbinál a PLANCK-féle törvény mutatja az energiamegoszlást (illetőleg a sebességmegoszlást az előbbinél).

Nézzük, miként határozza meg PLANCK a sugárzási entropiát az egyes monochromatikus (ν és $\nu + d\nu$ frequentia közé eső) részekre. Először is általános érvényességűnek tételezi fel a BOLTZMANN-féle elvet, mely szerint egy adott tetszésszerinti rendszer (akár anyagi, akár csak energetikai rendszer az, mint pl. az üregsugárzás) entropiája S és valószinüsége W közt az összefüggés

$$S = k \log W + \text{const};[1] \qquad (4)$$

---

[1] Lásd PLANCK: Theorie d. Wärmestrahlung 137. l.

k a (2). egyenletben említett gázállandó, melynek fizikai jelentése mellesleg az, hogy $\frac{3}{2}k$ egy molekula középenergiája (mozgási) 1° absolut hőmérséklet mellett.

Planck ezután kiszámítja N számú egyenlő természetű (ν frequentiájú) resonatorra, melyek stationarius sugárzás hatása alatt vannak egy absolut tűkröző falú üregben, hogy hányféleképen lehet köztük egy U_N energiamennyiséget elosztani. Fel van tételezve, hogy az U_N energia nem osztható tetszésszerinti végtelen sok részre, hanem csak egy adott P számú részre úgy, hogy $\frac{U_N}{P} = \varepsilon$ lehet a legkisebb energia, a melyet 0-on kívül egy resonator felvehet. Minden lehetséges eloszlás egy ú. n. Planck-féle complexiót jelent. Az összes és lehetséges complexiók száma arányos v. ha tetszik egyenlő avval a valószinüséggel, hogy egy resonatorra épen $\frac{U_N}{N} = U$ energia esik középértékben.

Rögtön látható, hogy ez a valószinűségi szám más és más, a mint az energiának legkisebb már oszthatatlan része kisebb vagy nagyobb. Ha ezen valószinüségre a Boltzmann-féle theóriát alkalmazzuk, rögtön megkapjuk azon N, illetőleg egy resonator entropiáját,[1] melyre az adott ν periódusú *tetszésszerinti* monochromatikus sugárzás révén U_N, illetőleg U energia esik. A Wien-féle eltolódási törvénynyel való összevetésből kitünik az ε energiaelem függése a ν-től:

$$\varepsilon = h\nu,$$

hol h egy új univerzális természetű constans.

Ezen entropiaérték nyilván egy összefüggést mutat fel egy ν frequentiájú resonator entropiája és energiája közt. Az entropiaértékből egyszerűen nyerhető a resonator temperaturája, ha a közönséges entropiadefinitiót

$$\delta S = \frac{\delta Q}{T}$$

[1] Egy resonator entropiáját úgy nyerjük, hogy N resonatorét elosztjuk N-nel.

(Q hőmennyiség, T temperatura) így általánosítjuk

$$\frac{\partial S}{\partial U}=\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}=\frac{1}{T},^{1} \qquad (5)$$

a hol S, U a resonator entropiája és energiája, σ és ρ pedig a térfogategységnyi monochromatikus ν frequentiájú sugárzás entropiája és energiája (más szóval: az entropia és energiasűrűségek). Az (5) tehát feltünteti egy resonator energiája, temperaturája és frequentiája közti összefüggést; a (I) egyenlettel összevetve $\mathfrak{K}$ ν és T összefüggését nyerjük:

$$\mathfrak{K}=\frac{h\nu^3}{c^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}, \qquad (6)$$

a mi a theória végczélja volt. Ez az ú. n. PLANCK-féle formula. Az (1) egyenlet (299. oldal) alapján energiasűrűségre átszámítva

$$\rho=\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}. \qquad (6^*)$$

Hogy egy sugárzási modell egy bizonyos energiának csak egészszámú többszöröseit veheti fel, egészen új fogalom a spekulativ természettudományban. A mechanikában és az elekrodynamikában, melyeken úgyszólván az egész fizika fel van építve, nem lehet ilyet minden komplikáltabb berendezés nélkül elképzelni. Egy gáz egy molekulája, egy elektromágneses tér egy része stb. folytonosan vehetnek fel energiát. Ez nyilvánvaló a közönséges mechanika és elektrodynamika differentiálegyenleteiből is, hol a szereplő mennyiségek (pl. a mechanikában az általános coordináták és momentumok) mind folytonosak, s úgyszintén ilyenek ezek energiafunctiói is. Nem akarjuk szigorúan azt állítani, hogy ezekben egyszersmind minden jelenség folytonos, csak azt, hogy oly mechanikai vagy elektrodynamikai modelle-

---

[1] Lásd Planck már többször említett munkáját, Theorie d. W. 126. l., 196. egyenlet.

ket, melyek diskontinuusan képesek energiát felvenni és leadni, könnyűszerrel nem konstruálhatunk. Az elektrodynamika legfeljebb elektromos elemi quantumokat ismer, de energiaquantumokat nem.

Felteszszük elsősorban a kérdést: azon egy okból, hogy a PLANCK-féle formula a tapasztalattal a legtökéletesebb mértékben megegyezik, el kell e a theóriának új alapelveit fogadnunk? Más szóval: a «$h\nu$» elemi energiaquantumok elve (lásd 303. oldal) szorosan hozzátartozik-e a sugárzó energia-, a fényemissió s vele együtt az anyag szerkezetének még nagyon homályos berendezéséhez, vagy más hypothezissel pótolható. Talán a PLANCK-féle formula kontinuus energiafunctiókkal is levezethető? Eddig már sokan foglalkoztak e kérdéssel s bár maga PLANCK is modifikálta theóriájának alapjait (lásd később 315. oldal), a nem folytonos energiaelemeket kiküszöbölni még nem sikerült. A vizsgálatok, melyek a fizikának számtalan ágában gyümölcsöztethetők voltak, azt látszanak igazolni, hogy e theóriában egy még ismeretlen hatalmas természeti törvény alapjai vannak lerakva.

A PLANCK-féle quantumtheóriával szorosan összefügg a «h» univerzális constans fizikai jelentése. A theória szerint «$h\nu$» jelenti a zéruson kívül azon legkisebb energiamennyiséget, melyet egy PLANCK-féle resonator felvehet. Minthogy azonban azt a módot, a miképen a «$h\nu$» quantumok absorbeálása vagy emittálása történik, nem ismerjük közelebbről, annálfogva azt sem tudjuk, hogy az univerzális «h» milyen szerepet játszik egy resonator s vele kapcsolatban egy molekula konstitutiójában. A fizikai jelentés valószinűleg elektrodynamikai, minthogy az atomok és molekulák berendezése is valószinűleg elektrodynamikai alapokon nyugszik (elektronok; a THOMSON-féle atommodell). Ennek ismeretére a PLANCK-féle alaphypothesist egy (vagy esetleg több) olyannal kellene pótolni, a mely az anyag konstitutiójába mélyebben nyúlik bele, mint az előbbi; ettől azonban — sajnos — még távol vagyunk.

Világosabb lesz előttünk a PLANCK-féle alaphypothesis, ha EINSTEIN következtetései nyomán összehasonlítást teszünk anyagi tömegpontok mechanikája[1] és a resonatorok mechanikája közt.

A PLANCK-féle formula átmegy a RAYLEIGH-JEANS-LORENTZ-féle[2] formulába, ha a «h» univerzális állandó nullává lesz, vagyis a resonatorok folytonosan vehetnek fel energiát. Hogy ez mit jelent, arra vonatkozólag gondolnunk kell a RAYLEIGH-JEANS-formula JEANS-féle levezetésére.[3] JEANS megállapit egy tükörüregben levő sugárzásra általános koordinátákat,[4] melyek száma egy hullámhossz-intervallumban a hullámhossztól függ. Legyen még az üregben egy ideális gáz ugyanazon a temperaturán, mint a sugárzás (absolut fekete). Az egészre (t. i. a sugárzás és a gáz) már most alkalmazható a statisztikus mechanika egy ismeretes törvénye, a mely szerint minden a HAMILTON-féle egyenleteknek engedelmeskedő mechanikai rendszerben, mely nagyszámú független parameter által van jellemezve, az idő folyamán egy egyensúlyi állapot áll elő és ekkor a rendszer minden *szabadsági fokára* egyenlő energiamennyiség esik időbeli középértékben. A JEANS-féle levezetésben tehát minden szabadsági fokra a gázelmélet értelmében $\frac{1}{2}kT$ energia esik. A sugárzási koordináták egy bizonyos számára eső összes energiát kiszámítva nyerjük a formulát.[5]

A mechanika közönséges törvényei, melyeknek fenti alkalmazása ellen a legcsekélyebb kifogás sem tehető, csak a PLANCK-féle formula egy határesetét igazolják. Nyilvánvaló, hogy ha azt akarjuk, hogy a PLANCK-féle formulát a fenti módon megkapjuk, *a mechanika közönséges törvényein kell változtatást tenni.* Hogy milyen módon, azt EINSTEIN[6] mutatta

[1] Mely a HAMILTON-féle elvet követi.
[2] Lásd 300. oldal, (2). egyenlet.
[3] I. H. JEANS; Phil. Mag. 1905. 10., 91. oldal.
[4] Egy parallelepipedon tükörüregben fellépő összes lehetséges állóhullámok szolgáltatják erre az alapot az elektromágneses tér MAXWELL-féle egyenleteinek feltételezésével.
[5] Lásd: PLANCK: Theorie d. W. strahlung: 176. oldal.
[6] A. EINSTEIN: Ann. d. Physik 1905. 17., 132. old. és 1906. 20., 199. old.

meg. Képzeljük szerinte a resonatort pl. a molekula egy atomjának. Az egyenletes energiaeloszlás törvénye értelmében a resonatorra thermodynamikus egyensúly esetén $kT = U$ energia jut.[1] Másrészről azonban ezen resonatorenergia és a sugárzás specifikus intenzitása közt az összefüggés (lásd 299. oldal (1) formula és 302. oldal (I)),

$$U = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho.$$

E kettő összevetése a Rayleigh-Jeans-féle formulát szolgáltatja. Ha azonban, mint Einstein megmutatta,[2] ezen atomként szereplő resonatorról felteszszük, hogy energiát csak a «$h\nu$» quantum többszöröseiként képes felvenni és leadni, akkor a resonator energiája a Planck-féle lesz s a belőle adódó sugárzási törvény szintén a Planck-féle formula.

Nyilvánvaló ezekből, hogy a resonatorok mechanikája nem egyezik a közönséges materiális mechanika elveivel, csak abban az esetben, ha a sugárzási modellek energiája a már látott diskontinuus módon változik. Igaz ugyan, hogy ez csak hypothesis, de hogy a valóságtól nem járhat messze, azt igazolják azok a következtetések, a melyek egyes anyagok specifikus hőjének a hőmérséklettel való változására vonatkoznak. Tudjuk, hogy a mechanikai hőelmélet szerint egy test hőtartalmát úgy tekinthetjük, mint a testet alkotó legkisebb részek (molekulák, atomok, elektronok . . .) kinetikus energiáját, hol a Boltzmann-féle theória alapján minden szabadsági fokra $\frac{1}{2}\frac{R}{N}T$ energia jut időbeli középértékben; (R a gázconstans, N egy grammatomban foglalt molekulák száma

$$R = 8{\cdot}31\,\frac{\text{joule}}{\text{grad}}$$

$$N = 6{\cdot}17 \,.\, 10^{23}).$$

---

[1] Egy linearis resonator mozgási energiája, mivel egy szabadsági fokkal bir $= \frac{1}{2}kT$; ugyanannyi közepesen a potentiális energiája is.

[2] A. Einstein: Theorie d. Lichterzeugung . . . etc. Ann. d. Physik 1906. 20., 199. oldal.

Ha most szilárd testeknél az atomokat egy egyensúlyhelyzethez fixálva gondoljuk, a mely körül azonban tetszésszerinti irányban rezgéseket végezhetnek (3 szabadsági fokkal), akkor egy ily hőhordozó atomra

$$3\frac{R}{N}T$$

energia esik (potentialis és kinetikus); egy mólnak hőkapaczitása tehát grammcalóriákban

$$3\frac{R}{N}\cdot 1 \text{ grad. } N = 3R (=) 6$$

volna (DULONG-PETIT-féle törvény). Számtalan test (silicium, bór, szén) azonban ettől és a NEUMANN-KOPP-féle szabálytól óriási nagy eltéréseket mutat. EINSTEIN-nek[1] támadt az a gondolata, hogy ezen eltéréseket talán ugyanoly okok létesítik, a melyek miatt helytelen sugárzási törvényt nyerünk, ha a PLANCK-féle resonatorra az egyenletes energiaeloszlás elvét alkalmazzuk. Vagy más szóval egy grammæquivalens tömeggel biró (N számú) ν periódusú modell hőtartalma nem $3RT$, hanem PLANCK szerint[2]

$$\bar{E} = 3R\frac{\frac{h\nu}{k}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \text{(gr. caloria értékben)}$$

s ennélfogva egy grammatom a specifikus hő részére nem $3R$ (körülbelül 6) értéket szolgáltat, hanem

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{6 \,.\, e^{\frac{h\nu}{kT}}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2}.$$

---

[1] A. EINSTEIN: Ann. d. Physik. 1907. 22., 180. oldal.

[2] A PLANCK-féle theória szerint egy resonator energiájának időbeli középértéke $\bar{U} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$; l. PLANCK: Theorie d. Wärmestrahtung 157. oldal, 231. egyenlet.

Természetesen az összes különböző ν periódusú ilyen hőatomokra ez összegezendő. A főprobléma most már az, hogy az egyes frequentiájú hőatomok mily mennyiségben fordulnak egy anyagban elő. Erre pedig némi világot nyújthat egyes anyagoknál a dispersió (pl. a gyémántnál az elméleti eredmények a kisérletiekkel elég szépen összevágnak).

Nem szándékunk ezen témával részletesebben foglalkozni, csak utalunk NERNST[1] munkáira, a ki a PLANCK-féle gondolatot az energiaquantumokra vonatkozólag igen érdekesen tudta értékesíteni az anyagi testek thermodynamikájában.

*

A quantumtheória, mint láttuk, csupán az emissiót és absorptiót végbevivő modellekre vonatkozik, azonban a sugárzás konstitutióját, vagy másszóval azt, hogy miként, mily eloszlással az egyes irányokban, terjed az energia, absolut nem érinti. Bizonyos következtetések azonban, melyeknek a BOLTZMANN-féle valószinűségi entropia definitió a kiindulópontja, azt látszanak igazolni, hogy a sugárzásban az energia nem az ætherhullám-elmélet szerint terjed, vagyis egy sugárzási centrumból emittált energia sűrűsége nem fogy a távolság négyzetével fordítva. Ezen következtetéseket, melyek EINSTEIN-től[2] valók, szándékszom jelenleg röviden, a mennyiben pedig e dolgozat keretébe vágnak, a II-ik rész elején részletesebben tárgyalni.

A BOLTZMANN-féle felfogás szerint, ha egy test vagy rendszer valami módon állapotjelzőkkel meghatározott állapotának valószinűsége W, akkor ezen rendszer entropiája S, egy additiv constans határozatlanságát tekintve, a következő:

$$S = k \log W + S_0,$$

hol $k = \frac{R}{N}$ a gázconstans, S_0 a határozatlan constans. Gon-

---

[1] Lásd NERNST: Zeitschrift für Elektrochemie 1911. 289. oldal.

[2] A. EINSTEIN: Ann. d. Physik 1905. 17., 132. oldal, és Phys. Zeitschrift 1909. X. 185. oldal.

doljunk most egy v térfogatú gázt, mely kevés «n» számú molekulából áll. Ezek a molekulák a v tér minden részén egyforma valószinűséggel előfordulhatnak. Előfordulhat tehát az is, hogy mind az «n» molekula a v térfogat egy v_0 térfogatrészében van momentán. Ezen állapot valószinűsége

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^n$$

s így entropiája a fenti Boltzmann-féle elv alapján

$$S - S_0 = k \log \left(\frac{v}{v_0}\right)^n. \tag{7}$$

Számítsuk ki most a Wien-féle sugárzási törvény alapján egy ν periódusú v térfogatban foglalt monochromatikus sugárzás entropiáját. A Wien-féle egyenlet:

$$\rho = a\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (a \ldots \text{constans}).$$

Felhasználva a 304. lapon található összefüggést (5. egyenlet) az entropia- és energiasűrűségre

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial \sigma}{\partial \rho},$$

egy v térfogat sugárzási entropiája

$$S = v \int \frac{1}{T} d\rho + \text{const.}$$

Szerepeljen az előbbihez teljesen hasonló körülmények közt egy v_0 rész térfogat, akkor az entropiaváltozás v-ről v_0-ra

$$S - S_0 = \frac{\rho v}{\beta \nu} \log \left(\frac{v}{v_0}\right),$$

hol

$$\beta = \frac{h}{k}.$$

A Wien-féle törvény érvényes $\frac{\nu}{T}$ nagy értékeire.[1] Ebben a kör-

[1] Pontosabban olyanokra, melyeknél $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ nagy az 1-hez.

ben tehát úgy látszik, a sugárzás részecskéinek véletlen elhelyezkedése olyan, mint egy gázmolekuláé. Jobban kitűnik ez, ha a 309. lapon levő BOLTZMANN-féle elvvel összehasonlítjuk; ebből

$$W = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{N}{R}\frac{\varrho v}{\beta \nu}} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{\frac{\varrho v}{h\nu}}.$$

Az «n» molekula számának megfelel a $\frac{\rho v}{h\nu}$ exponens; a dolog tehát úgy látszik, mintha az egész ρv energia n drb $h\nu$ *energiaquantumból állana*, melyek egymástól függetlenül fénysebességgel terjednek tova.

Ettől az «EINSTEIN»-féle következtetéstől számithatjuk a sugárzás atomistikus theóriájának kezdetét. Hogy a sugárzásban az energia oszthatatlan quantumokban terjed, teljesen ellentétben áll a sugárzásról eddig alkotott fogalmainkkal, melyek szerint ez hullámokban terjed s az egyes *elemi* hullámok energiasűrűsége mindenkor a távolság négyzetével fogy. Lassanként a sugárzás kérdésében két vezérelv kezdett egymással szembehelyezkedni: a *quantumsugárzás* és a régi kipróbált *aetherhullámtheória.*

A továbbiakban czélunk nagy vonásokban ezen két elv előnyeit és hátrányait, a mennyire a mai ismereteink mellett lehetséges, röviden ismertetni.

Ha a sugárzási energiát osztatlan quantumokban tovahaladónak képzeljük, akkor az absorptió folyamata úgy történhetik csak, hogy egy absorbeáló modell, pl. egy resonator mindig legalább egy egész energiát absorbeál. Evvel természetesen kénytelenek vagyunk az emlitett energiaquantumokról egyszersmindt feltételezni, hogy egy adott irányban és egy rendkívüli kis térrészben haladnak. Érdekesen lehet evvel a fotoluminiscentia STOKES-féle szabályát megmagyarázni.[1] Ezen szabály azt mondja, hogy egy ν frequentiájú fény behatása alatt egyes fluoreskálni képes testek mindig csak oly fénynemeket képesek

---

[1] A. EINSTEIN: Ann. der Physik 1905. 17., 132. oldal.

emittálni, melyek frequentiája mindig kisebb ν-nél. Az EINSTEIN-féle quantumtheória szerint ez könnyen érthető, ha meggondoljuk, hogy egy modell mindig csak egy egész quantumot képes felvenni, pl. egy egész $h\nu_1$ energiamennyiséget. Ha ennek felvétele után rögtön kénytelen emittálni, akkor az emittált quantum

$$h\nu_2 \leqq h\nu_1$$

lehet, a miből már az említett szabály következik.

Hasonló következtetéseket végez ezen theória alapján EINSTEIN[1] a fény fotoelektromos hatására vonatkozólag a fémeken. Ismeretes, hogy a fémek ritkított térben magas frequentiájú (ultraibolya) fény hatása alatt negativ elektronokat emittálnak, vagyis kathódsugárzást bocsátanak ki magukból. E jelenséget először LENARD vizsgálta[2] s azt találta, hogy a kathódsugarak mineműsége, azaz az emittált elektronok sebessége csupán az anyag minőségétől és a sugárzás frequentiájától függ, de nem a sugárzás intenzitásától. Az emittált elektronok mennyisége azonban az intenzitással egyenesen arányos. E jelenség magyarázatába igen szépen illeszthető bele az EINSTEIN-féle theória, a mely szerint arra a czélra, hogy egy elektron a fémből kiléphessen, mindig legalább egy egész quantumnak kell elhasználódni. Az elektronok kilépési energiája s így sebessége tehát csupán az absorbeált quantum mineműségétől, azaz a «ν» frequentiától s még attól a körülménytől függ, hogy mennyi energia emésztődik fel az elektronnak a fémből való kilépése alkalmával. Ez utóbbi nyilván az anyagi minőség függvénye.

Hasonló következtetéseket végez EINSTEIN a gázok ionisatiójára vonatkozólag ultraviola sugarak hatása alatt, majd ezen alapon a fémek már említett fotoelektromos effektusa és a VOLTA-féle effektus közt állapít meg egyes quantitativ összefüggéseket.

Míg az eddigiek tisztán theoretikus értékűek, addig egyesek kisérletek alapján próbálják a quantumtheória szükségességét

---

[1] Lásd u. ott.

[2] P. LENARD: Ann. d. Physik 1902. 8., 169. oldal.

igazolni. Különösen STARK magyaráz érdekesen egyes jelenségeket a ritkitott térben történő elektromos kisülések köréből.[1] Rövidség kedvéért azonban csak utalunk rá.

Hangsúlyoznunk kell, hogy ezek a következtetések nem vonják okvetlen maguk után az EINSTEIN-féle quantumtheória szükségességét. Nem jelentik azt, hogy esetleg nem lehetne a MAXWELL-féle hullámelmélet (elektrodynamikai) alapján e jelenségeket, talán kevésbbé csinosan és egyszerűen, megmagyarázni. El kell azonban ismernünk — H. A. LORENTZ szavaival élve — hogy az említett jelenségek a fényquantumok feltételezése nélkül csak óriási nehézséggel magyarázhatók meg.

Próbáljuk pl. — LORENTZ[2] nyomán — a MAXWELL-féle elektrodynamika alapján az előzőleg tárgyalt fotoelektromos effektusát a fémeknek pertraktálni. Hogy egy elektron a fémből kiszabaduljon, ahhoz, mint az eredményekkel jól egyezik, egy modellnek legalább egy «$h\nu$» nagyságú quantumot kell absorbeálnia. Kérdés, lehetséges-e, és mikor, hogy egy elektrodynamikus modell (pl. resonator) egy ily energiamennyiséget absorbeáljon. Tételezzük fel, hogy egy rezgő elektron, mely az absorptió folyamatát végzi, az egész ráeső sugárzással resonantiában van. Ez ugyanis a legkedvezőbb eset, mert ekkor az absorbeált energia az időegység alatt a maximum. LORENTZ tisztán elektrodynamikai alapon kiszámítja, hogy ehhez egy oly fénynyaláb energiája kell, mely pro cm^2 és pro secundum 93,000 absolut egységet szállit. A solarconstansból erős napfényben mindössze 2.000,000 absolut egység adódik hasonló viszonyok közt. Ha tehát az egész napfény sugárzása monochromatikus lenne, akkor még képes volna egy resonator egy «$h\nu$» energiát gyűjteni. Fotoelektromos effektusok azonban elérhetők jóval kisebb intenzitású fénysugarak szűk intervallumú monochromatikus

[1] I. STARK: Neue Beobachtungen an Kanalstrahlen in Beziehung zur Lichtquantenhypothese: Phys. Zeitschrift 1908. IX. 767. oldal. Dissymetrie der Röntgenstrahlen: Phys. Zeitschrift 1910. XI. 24. oldal.

[2] H. A. LORENTZ: Alte u. neue Fragen d. Physik. Lásd Phys. Zeitschrift 1910. XI. 1250. oldal.

részeivel, melyek intenzitásai messze alul maradnak a 93,000 absolut egységen, a mikor tehát egy resonator egyáltalán nem képes «*hν*» energiát összegyűjteni. Ennek oka nyilván az elektronok csillapodási decrementumában rejlik, mely az elektrodynamika szükségszerű következménye. Ha ily csillapodás nem volna, akkor egy rezgő elektron képes volna határtalanul absorbeálni.

Távolról sem mondható, hogy az EINSTEIN-féle theória a helyes irány a további kutatásokra nézve. Hiszen az interferentia és az elhajlási jelenségek magyarázataira, melyek a hullámelmélet és a HUYGHENS-féle elv alapján oly fényesen keresztül vihetők, az EINSTEIN-féle theória alapján még csak gondolni sem lehet. Mindamellett eredményeinél fogva a MAXWELL-féle theóriával szemben legalább figyelemreméltónak kell tartanunk. Hogy e két elmélet mint fog kialakulni, az még a jövő kérdése.

*

Az újabb törekvések, melyek a sugárzás kérdésének tisztázására vonatkoznak, jórészt oda irányulnak, hogy oly sugárzási modellt állítsanak elő, mely egy már említett diskontinuus tulajdonságon kívül engedelmeskedjék a mechanika, illetőleg az elektrodynamika törvényeinek. Mint a régi PLANCK-féle theoriánál azt láttuk, a sugárzási modellek diskontinuitása abban nyilvánul, hogy ezek mindig csak egy energiaelem egész számú többszöröseit absorbeálhatják, illetőleg emittálhatják, más szóval a modellek energiája mindenkor egy ε quantum többszöröse lehet. Ezek a feltevések azonban nem minden kifogás nélkül valók. Részint azért, mert a PLANCK-féle theória elektromos modelljei energiákat *folytonosan* és minden értékben képesek felvenni, a mire épen a theória egyik alaptörvénye (lásd 302. oldal I. egyenlet) van építve, részint pedig, mint azt LORENTZ kimutatta (lásd 313. oldal), ily szigorú elektrodynamikai alapon álló modellek intenzív sugárzás esetén még annyi energiát sem képesek gyűjteni maguknak, a mennyi egy energiaelem (*hν*) értéke, nemhogy még annak egész számú többszöröseit képesek volnának felvenni. Ezen okok miatt törekednek újabban az ily sugárzási modellek diskontinuus sajátságait megváltoztatni. SOMMERFELD-nek[1] az a gondolata, hogy a modellek diskontinuitása talán nem az energiafelvételben, hanem egy a «h» constans jellegével (energia × idő)[2] biró mennyiségben rejlik, a sugárzási törvényre (spektrálegyenlet) vonatkozólag még nem volt kiaknázható. Annál érdekesebb azonban M. PLANCK[3] új sugárzási theoriája, mely a sugárzási modellek viselkedésében a diskontinuus energiafelvétel feltevését elejti s a diskontinuitást csak az emissió esetében tartja fenn. Ezen theóriát, különösen a később tárgyaltakkal való *összehasonlítás* kedvéért, röviden ismertetni kivánjuk.

PLANCK az elektrodynamika követelményeivel ellentétben sugárzási modell gyanánt oly elektromos dipolt használ, a melynek csillapodási decrementuma zérus. Ily modell, mint belátható, folytonosan absorbeál energiát, de nem emittál. Kimutatható, hogy ezen modell energiája arányosan növekszik az idővel és azon stationarius sugárzás specifikus energiasűrűségével, a melynek a dipol ki van téve. Minthogy a modell ilyformán elvesztette emittáló képességét, az emissió folyamatának végzésére PLANCK egy más ismeretlen természetű okot választ; még pedig egy oly modellt képzel a dipolhoz kapcsolva, a melynek az a tulajdonsága, hogy mindannyiszor emittálhatja a dipol felvett *összes* energiáját, valahányszor az ($h\nu$), ($2h\nu$), ($3h\nu$) stb. értékekre felnövekedett. Ez az emissió azonban nem következik be mindig, hanem csak egy «η» valószinűséggel; vagyis pl. ha a modell absorbeált energiája $h\nu = \varepsilon$, akkor annak a valószinűsége, hogy emissió bekövetkezik, egyenlő η-val. Hasonlóan áll ez az «ε» egészszámú többszöröseire is. Most még csak az η értékére kell hypothezist késziteni s evvel előállt egy sugárzási theória. PLANCK felteszi, hogy annak a valószinűsége, hogy

[1] A. SOMMERFELD: Phys. Zeitschrift 1911. XII. 1057. oldal.
[2] A mechanikában az ú. n. «működés» bír ily jelleggel.
[3] M. PLANCK: Ann. d. Physik 1912. 643. oldal.

adott esetben semmi emissió sem következik be viszonyítva ahhoz, hogy emissió tényleg bekövetkezik, arányos az energia specifikus sűrűségével, vagyis

$$\frac{1-\eta}{\eta}=p\rho,$$

hol ρ az energiasűrűség, p pedig csupán ν-nek függvénye. E theória eredményeképen a PLANCK-féle spektrálegyenletet állítja elő, ha «p» értékét az érvényesnek ismert RAYLEIGH-JEANS formulából számítjuk ki.

$$p=\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}$$

(c a fénysebesség, h a PLANCK-formula univerzális constansa).

II. Az Einstein-féle entropia-fogalom és a sugárzási ingadozás.

A sugárzás problémája, mint azt ezen dolgozat első részében már többször kiemeltük, fejlődésében eddigelé két irányt mutat. Egyiknek alapja a már sok szép eredményt mutatott PLANCK-féle hypothezis, mely szerint a sugárzást emittáló és absorbeáló modellek energiája mindig egy bizonyos «$h\nu$» nagyságú energiaquantumnak egész számú többszöröse. Újabban már említett okokból[1] PLANCK ezen hypothezist modifikálta, a mennyiben az energia absorptió folyamatát folytonosnak tételezte fel, az emissió pedig quantumok szerint történik, mint ezt már előzőleg részletesebben láttuk. Ezen hypothezisek nyilván csak az anyagszerkezetre vonatkoznak, más szóval az anyag azon részeire, melyek a fényemissió centrumai, azonban a sugárzásnak magának mibenlétét abszolute

[1] Az elektrodynamika szerint egy resonator (rezgő dipól) minden energiát folytonosan felvehet. Erre van alapítva a resonator energiájának az I. egyenletben levő összefüggése a sugárzási intenzitással. A fenti hypothezis pedig diszkrét energiamennyiségekről szól.

nem érintik. A hypothezisekre tehát teljesen irrelevans, hogy hullámokban terjed-e szét az emittált energia, mint ez eddig a fény és sugárzó hőnél elfogadott volt, vagy pedig egyes quantumokban, mint ez a kathódsugaraknál s az újabb vizsgálatok alapján a radioaktiv β sugaraknál igen valószinű. A másik hypothezis, az EINSTEIN-féle, mely a másik irányt képviseli, már egyenesen a sugárzás konstitutióját állapítja meg, mint azt már az első részben kifejtettük. A WIEN-féle formula érvényességi körében (melybe a PLANCK-féle átmegy nagy $\frac{\nu}{T}$ értékekre) fennálló bizonyítás (lásd 310-ik oldal) azonban csak bizonyitani *látszik* azt, hogy a fény atomszerű berendezéssel bír; vagyis olyan a szerkezete, mely az energia hullámokban való tovahaladásának törvényét nem követi. Sokkal döntőbb EINSTEIN-nek[1] egy másik vizsgálata, melylyel szinte megczáfolhatatlanul bizonyítja, hogy a fény (sugárzás) tovaterjedésének elektrodynamikai alapon álló hullámelmélete sehogysem egyeztethető össze a thermodynamika BOLTZMANN-féle valószinűségi elvével. Két hatalmas fizikai principium jut így összeütközésbe: az elektromágneses fényelmélet alapján álló *hullámelmélet*, mely eddig majdnem minden idevágó kérdésben kielégitő volt, és a BOLTZMANN-féle entropiafogalom, mely a mechanikai thermodynamikának képezi alapját s a melyen a PLANCK-féle formula is nyugszik.

A következőkben ismertetjük ezen EINSTEIN-féle vizsgálatokat, melyeken különben jelen dolgozatunk thémája is alapul.

A kinetikus thermodynamika a BOLTZMANN-féle alapelven van felépítve, mely szerint egy rendszer (általánosítható nem materiális rendszerekre is, pl. egy üregben foglalt sugárzás) entropiája S és azon állapot valószinűsége W közt, a melyben a rendszer az adott feltételek közt van, a következő összefüggés áll fenn:

[1] Lásd: A. EINSTEIN: Phys. Zeitschrift 1909 X. 185 oldal, továbbá A. EINSTEIN: Opalescens von homogenen Flüssigkeiten . . . etc. Ann. d. Physik 1910 33., 1275 oldal értekezés elejét.

$$S = \frac{R}{N} \log W + \text{const}\,; \qquad \text{(II)}$$

R a gáz állandó;

$$R = 831\,.\,10^5 \frac{\text{erg}}{\text{grad}},$$

N pedig a molekulák száma egy molban:

$$N = 6{\cdot}18\,.\,10^{23}.$$

A W valószinűséget csak úgy lehet értelmezni, ha az illető anyagra valamiféle molekuláris theóriával birunk. Pl. ha ismerjük egy gáz egyes részeinek (molekuláinak s atomjainak) helyzeti és sebességi elrendeződésének törvényeit, továbbá azt, hogy mint függnek az egyes részek egymástól (pl. a molekulákon belül az egyes atomok), akkor előállitha'juk ezen rendszer entropiáját. A rendszer valószinűségét jellemezhetjük azon öszszes lehetséges módok összességével, a melyeknél a kérdéses gázállapot előáll. Ha a gáz adott fix temperatura mellett thermodynamikus egyensúlyban van, akkor a sebességi eloszlás az ismert Maxwell-féle törvény által van meghatározva. Ez az eloszlás az összes lehetséges gázmolekulasebesség eloszlások közt a legnagyobb valószinűséggel bir. Azonban egy gáz nem fogja szigorúan ezen legnagyobb valószinűséggel biró eloszlást elfoglalni, hanem kisebb valószinűségű eloszlásokat is mutat; még pedig azért, mert az egyensúlyi állapot valószinűsége, bármily nagy is a többi állapotok valószinűségéhez képest, nem az egység, hanem ehhez legfeljebb csak igen közel álló. Hogy az egyensúly körüli állapotok valószinűsége nagyságrendre nézve mily különböző, azt legjobban mutatja a (II) alatti Boltzmann-féle törvény, ha ezt ily alakban irjuk fel

$$W = \text{const}\, e^{\frac{N}{R}S}.$$

A constanst alkalmas módon úgy választhatjuk, hogy a W valószinűség maximuma az egység legyen. Ily rendű valószinűségi értékeket kapunk pl., ha egy rendszer állapotának valószinűségét következőkép definiáljuk: figyeljük a rendszer állapotát egy T időn keresztül, akkor azt találjuk, hogy ezen időtartamból egy t ideig a rendszer a kérdéses állapotban van; $\frac{t}{T}$ tört lesz a rendszer állapotának valószinűsége. Így definiálva a rendszer valószinűségét, a formulából kitűnik, hogy, ha S változása kicsiny is relative az S_0 értékhez, a mely a szigorú egyensúlyi állapot entropiáját jelenti, a W valószinűség változása igen tetemes, mert $\frac{N}{R}$ óriási nagy szám. Ennélfogva S_0-nak csak egy rendkívüli kis környezete fog oly valószinűséggel bírni, a melynek nagyságrendje a maximális S_0-hoz tartozó valószinűséget megközelíti.

Tegyük fel most egy rendszerről, hogy thermodynamikus egyensúlyban van. Akkor ez a rendszer egy sor állapoton fog keresztülmenni, melyek különböző valószinűséggel bírnak. Ezek közt mindenesetre olyan állapotok lesznek túlsúlyban, a melyek valószinűsége nem elhanyagolható kicsiny az egyhez. De épen az előbb mondottakból nyilvánvaló, hogy az ilyen valószinűségű állapotokhoz tartozó entropiaértékek a maximális entropiaértéktől csak oly kevés értékkel térnek el, a melyek az észlelhetőség határain jóval kívül esnek. A formalis thermodynamika szerint a thermodynamikus egyensúlyhoz tartozó entropia (s vele a temperatura) egy fix érték, míg a valószinűségi alapon álló hőelmélet értelmében ez állandóan, habár praktikusan észre nem vehető módon ingadozik az S_0 maximum alatt.

A thermodynamikus egyensúly ingadozása természetesen nyomát hagyja a rendszer *észlelhető* parameterein. Pl. egy gáznál a nyomás, a sűrűség egy kis térfogatrészben, vagy az energia ugyanilyen kis térfogatban állandó ingadozásnak van alávetve. Csakhogy ezen ingadozások meghatározására megfigyelési eszközeink nagyon tökéletlenek. Kimutatható,[1] hogy azon munkák középértéke, a melyek szükségesek, hogy egy rendszer észlel-

[1] A. Einstein: Ann. d. Physik 1907 22., 569. lap.

hető parametereit egy idő folyamán kiragadott pillanatokban mindig az egyensúlyt jellemző parameterekbe vigyék át, olyan rendűek, mint egy gázmolekula közép kinetikai energiája. Vannak azonban oly esetek is, mikor ezen theóriák az ingadozásra az észlelhetőség határain belül eső értékeket is szolgáltathatnak.[1]

Az észlelhető parameterek ingadozásainak alapján értelmet adhatunk a Boltzmann-féle elvnek akkor is, ha semmiféle elementáris (molekuláris stb.) theóriákkal nem rendelkezünk. Mert a W valószinűséget egy állapotra meghatározhatjuk, ha meghatároztuk (pl. egy ideális műszerrel), hogy egy adott ingadozás, azaz egy észlelhető parameter eltérése a normálistól mily valószinűséggel bír.

Ez a gondolat, mely Einstein-től származik, igen érdekesen használható fel a sugárzások tanában annak eldöntésére, hogy egy «V» üregbe zárt monochromatikus sugárzás milyen ingadozást mutat a «V» egy résztérfogatában «v»-ben. Legyen a V teljesen hőáthatatlanul elzárt térben egy ν, $d\nu$, jellemzőkkel ellátott monochromatikus sugárzás és a «v» a V-nek egy rendkívül kis része, de mégis oly nagy, hogy lineárdimenzióihoz képest a kérdéses sugárzás hullámhossza elhanyagolható csekély. Legyen továbbá ezen «v» térfogatban foglalt energia középértéke

$$\eta_0 = \rho_0 v d\nu,$$

hol ρ_0 az energiasűrűség közepe; η_0 felel meg nyilván a szigorúan vett thermodynamikus egyensúlynak. Az ingadozás miatt egy momentán időpontban sohasem lesz az energia η_0, hanem egy, ettől bár rendkívül kevéssé eltérő η. Einstein kimutatja,[2] hogy annak a valószinűsége, hogy az energiaingadozás értéke momentán η és $\eta + d\eta$ közt van,

$$dW = \text{const}\; e^{\frac{N}{R}S}\, d\eta, \tag{8}$$

[1] Smoluchowsky: Ann. d. Physik 1908. 25., 265. lap.

[2] Lásd Einstein-nek a 317. oldalon már említett két értekezését.

hol S a momentán η értékhez tartozik, lévén az entropia mindenkor az energia függvénye. Hogy az összes ingadozások nagyságára egy numerikus mértéket nyerjünk, czélszerű az

$$\eta - \eta_0 = \varepsilon$$

ingadozások négyzeteinek időbeli középértékét, $\overline{\varepsilon^2}$-t kiszámítani. Ez a (8) alapján

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{\frac{N}{R}\left(\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}\right)_0}; \tag{9}$$

σ jelenti az η-hoz tartozó entropiát a «v» térfogatrészben, a 0 index pedig azt jelenti, hogy a differentiálhányados értéke az $\varepsilon = 0$, vagyis

$$\eta = \eta_0$$

esetre veendő.

Ha tudjuk most, hogy függ «σ» az «ε»-tól, vagy a mi ugyanaz, η-tól, akkor a (9) alatti ingadozás kiszámítható.

Alkalmazzuk a (9) alatti formulát arra az esetre, mikor σ-nak η-tól való függését a Planck-féle formulából leszármaztatható entropia érték szolgáltatja. Kutatjuk tehát, milyen a sugárzás ingadozása a valóságban, tudva azt, hogy a Planck formula a *tapasztalattal egyezik.* Ilyenformán, a nélkül, hogy a sugárzás mibenlétét, annak theóriáit a legcsekélyebb módon is érintenők, meg tudjuk határozni tisztán a Boltzmann-Einstein-féle entropia principium alapján az ingadozások quadratikus közepét; ez

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{R}{Nk}\left\{h\nu\eta + \frac{c^3}{8\pi\nu^2 d\nu}\,\frac{\eta^2}{v}\right\} = \left(h\nu\rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2\right) v\,d\nu \text{ [1]} \tag{10}$$

(a 0 indexet kényelem kedvéért elhagyjuk).

Megnézve e formulát, látjuk, hogy két összeadandó tagból áll, melyek külön-külön a Wien és Rayleigh-Jeans formulák

---

[1] A Planck-formula k-ja közel egyenlő a gázelmélet «k»-jával, a mely tudvalevőleg $= \frac{R}{N}$.

ingadozásaival egyenlők, mert e formulák a PLANCK-félének határesetei. A számítás különben meggyőz erről bennünket. Kérdés, mikép egyeztethető meg e két tag külön-külön a fény tovaterjedésének közönséges törvényeivel. Ha a tovaterjedés a hullámelmélet alapján történik, akkor az ingadozás csakis aképen jöhet létre, hogy az egyes hullámok interferentia révén majd erősítik, majd pedig gyöngitik egymást. EINSTEIN kimutatja, hogy az interferentia csakis a második tag magyarázatára elégséges, vagyis arra az esetre, mikor a RAYLEIGH-JEANS-féle formula érvényes. Lényeges különösen az, hogy az ingadozás első tagja a hullámelmélettel nem magyarázható meg, azonban igen jól megérthető, ha feltesszük, hogy a sugárzás «$h\nu$» nagyságú, rendkívüli kis kiterjedésű energiaquantumokban terjed. E kijelentésnek az első része pozitiv határozott állítás, mely úgyszólván megczáfolhatatlanul szembeállitja a fizikának két hatalmas principiumát, az ætherhullám elméletet és a BOLTZMANN-féle elvet. A második rész azonban nem mond többet, mint hogy az említett ingadozás igen könnyen előállitható az EINSTEIN-féle fényquantum theória segitségével; de tág tere nyílhatik meg a spekulatióknak más theóriák alapján is, melyek szintén alkalmasak a lehetnek «$h\nu\eta$» ingadozás magyarázatára. Hogy ma még ilyenek az EINSTEIN-féle fényquantumtheórián kívül nincsenek, semmiesetre sem jelentik azt, hogy nem is lesznek.

Maga a fényquantumtheória azonban egyedül ép oly okok miatt nem állhat fenn, mint azt már említettük az ætherhullámtheóriáról. Az egyik is és a másik is csak az energiaspektrumok határaira érvényesek; ép ezért, mint a következő fejezetben megvilágitani iparkodom, teljesen helytelen volna a fényquantumtheóriát az ætherhullámtheória egy helyettesitőjének tekinteni. Hogy vajjon e két theóriának egy szerencsés kombinatiója vezetne e czélhoz, vagy esetleg egy teljesen új elmélet, mely az előbbi kettőnek összes előnyeit egyesíteni tudná magában, az további vizsgálatok kérdése.

*

A «$h\nu\eta$» ingadozás egy egyszerű, minden valószinűségszámítástól ment előállitása az Einstein-féle fényquantumtheória alapján. A Wien-féle sugárzási törvény. A fényquantumtheória egy új modifikatiója és ennek következménye a Planck-féle sugárzási törvény.

E fejezetben czélunk egy könnyen érthető módon bemutatni, hogy a sugárzás ingadozása egy «v» térfogatban (mely egy V-nek igen kis része) «$h\nu\eta$», ha a sugárzás «$h\nu$» nagyságú, egymástól függetlenül tovaterjedő, dimenzióira a «v«-hez elhanyagolható energiaquantumokból áll, amelyek fénysebességgel haladnak tova. Ezen ingadozásértékből, talán a létező legegyszerűbb módon, következik a Wien-féle sugárzási törvény, mely tudvalevőleg nagy $\frac{\nu}{T}$ értékekre érvényes.

Választunk egy abszolut tükröző falakkal biró üreget, melynek térfogata legyen V. Figyelembe veszünk e térfogatban egy ehhez relative igen kis dimenziójú «v» térfogatot, mely azonban mégis oly nagy, hogy az üregben foglalt ν, $d\nu$, jellemzőkkel ellátott monochromatikus sugárzás hullámhossza ehhez elhanyagolhatóan kicsiny legyen a lineáris dimenziókat tekintve, teljesen úgy, mint már Einstein-nél is láttuk. Minthogy az adott monochromatikus sugárzás frequentiaintervalluma felett szabadon rendelkezünk, azt alkalmas módon úgy kivánjuk választani, hogy a «v» térfogatban foglalt η energia értéke *igen kicsiny* legyen a «$h\nu$» energia értékhez képest. Ez mindig elérhető, mert hiszen

$$\eta = \rho v d\nu$$

értéket tekintetbe véve, ρ bármilyen nagy is legyen, $d\nu$ mindig választható úgy, hogy egy megadott v mellett $\rho v d\nu$ kicsiny legyen «$h\nu$»-höz.

Minthogy egy Einstein-féle fényquantum dimenzióját elenyésző csekélynek vettük fel, annálfogva a «v» térfogat energiája egy pillanatban vagy 0, vagy «$h\nu$», vagy «$2h\nu$» és így tovább lehet. Mivel azonban az energia időbeli középértéke η igen kicsiny egy quantum értékéhez képest, minden nagyobb hiba nélkül feltehetjük, hogy a «v» térfogatban foglalt energia vagy zérus, vagy «$h\nu$». Más szavakkal kifejezve a v térfogatban vagy nincs egy fényquantum sem, — s ez a leggyakoribb eset, — vagy pedig egy van. Már két quantumnak jelenléte óriás módon valószinűtlen egy jelenlétéhez képest; ettől tehát eltekintünk, s annál inkább azoktól az esetektől is, mikor három vagy még több quantum volna egyszerre az említett térfogatban jelen. Válaszszunk ki most egy T időt, mely alatt a «v» térfogatot figyelemmel kisérjük. Legyen t az az idő, a meddig a kis térfogatban az egész T idő folyamán egy fényquantum van; akkor $T-t$ ideig egyáltalában nincs energia az említett térrészben. Az energia időbeli középértéke

$$\eta = h\nu \cdot \frac{t}{T}; \qquad (a)$$

az ingadozás vagy

$$\varepsilon = -\eta,$$

vagy pedig

$$\varepsilon = h\nu - \eta$$

lesz, a minél fogva az ingadozások quadratikus középértéke

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{\eta^2 (T-t) + (h\nu - \eta)^2 t}{T}.$$

A $h\nu$ mellett η^2-ot, a T mellett t-t elhanyagolva

$$\overline{\varepsilon^2} = \eta^2 + (h\nu)^2 \frac{t}{T};$$

az (a) révén továbbá

$$\overline{\varepsilon^2} = \eta^2 + h\nu\eta = \eta\,(\eta + h\nu) = h\nu\eta,$$

mert $h\nu$ mellett η elhanyagolható.

Megjegyezzük, hogy nem okvetlen szükséges a szigorúan vett Einstein-féle quantumtheóriát kiinduló pontul venni. Csupán csak annyit kell feltételezni, hogy egy, tetszésszerinti «v» térfogat csupán diskontinuus módon képes energiákat felmutatni; ez a felfogás analóg volna a Planck-féle resonatorok tulajdonságaival, melyek, mint tudjuk, szintén csak diszkrét energiamennyiségeket képesek felmutatni a PLANCK-féle theória értelmében. Hogy azonban ezen ingadozást mily bajos másképen, mint a quantumtheóriával megérteni, azt megmutatja egy rövid meggondolás. Ugyanis utóbbi kijelentésünkben egy «v» nagyságú térfogat kell, hogy diskontinuusan tartalmazzon energiamennyiségeket; már pedig a «v» térfogat nagyságát adott határokon belül tetszésszerint változtathatjuk s hogy ily tetszésszerint felvett v térfogatok mindegyikében 0, $h\nu$, $2h\nu$ stb. legyen az energia, azt az energia folytonos eloszlásával a térben nem lehet megmagyarázni.

Az energiaingadozás ily módon igazolt értékéből rendkívüli, talán a létező legegyszerűbb módon, előállítható a WIEN-féle sugárzási törvény. Csakis a 321. lapon (9) formulából ezen esetre fennálló

$$h\nu\eta = \frac{1}{\frac{N}{R}\left(\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}\right)_0} = \frac{k}{\left(\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}\right)_0} \tag{b}$$

differentiálegyenletet kell az adott határfeltételek mellett (a WIEN-féle eltolódási törvény) megoldani.

Ezen egyenlet jobboldalát czélszerű kissé átalakitani. Az entropia definitiója szerint:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{d\eta} = \frac{1}{T};\text{[1]}$$

tekintetbe véve, hogy ha η_0 a v térfogatban foglalt energiaközépérték,

$$\eta = \eta_0 \pm \varepsilon$$

s így

$$d\eta = \pm\, d\varepsilon.$$

A fenti értéket a (b) alatti differentiálegyenletbe belehelyetesítjük:

$$h\nu\eta = \frac{k}{\frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\eta}} = \pm\, kT^2\frac{d\eta}{dT}.$$

[1] Lásd PLANCK: Theorie d. Wärmestrahlung 126. oldal, 196. egyenlet és 127. oldal, 199. egyenlet.

A negativ előjel nem állhat meg, mivel az ingadozás, quadratikus középérték levén okvetlen pozitiv, úgyszintén k és T^2 is; $\frac{d\eta}{dT}$ pedig nem lehet negativ, mivel a tapasztalás azt mutatja, hogy az energiasűrűség értéke az abszolut temperaturával növekszik.[1] A $+$ előjelet választva a differentiálegyenlet integrálja

$$\log \mathrm{const.}\, \eta = -\frac{h\nu}{kT}$$

vagyis

$$\eta = \mathrm{const.}\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

A constans tartalmazhatja még a ν, v, $d\nu$ mennyiségeket. Mivel η feltétlen arányos v és $d\nu$-vel, annálfogva

$$\eta = c(\nu)\, e^{-\frac{h\nu}{kT}} v d\nu,$$

azaz a specificus energiasűrűség

$$\rho = c(\nu)\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{11}$$

A $c(\nu)$ megállapitására a Wien-féle eltolódási törvény szolgál, a mely szerint a sugárzásbeli energiasűrűség csak ily alakú lehet[2]

$$\rho = \frac{\nu^3}{c^3} F\left(\frac{T}{\nu}\right); \tag{12}$$

(11) és (12) összevetéséből nyilvánvaló, hogy

$$c(\nu) = \mathrm{const}\, \frac{\nu^3}{c^3},$$

a mivel egy szorzó állandó határozatlanságával a Wien-féle sugárzási törvény adódik

$$\rho = \mathrm{const}\, \frac{\nu^3}{c^3}\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

---

[1] A 321. oldalon levő (9) diff. egyenletben az absolutértéket kell, hogy a jobboldal mutassa.

[2] Lásd Planck: Th. d. Wärmestrahlung 82. oldal 101. egyenlet.

Látható mindezekből, hogy az EINSTEIN-féle quantumtheória egyenesen *a* WIEN-*féle sugárzási törvényre vezet.*

Bizonyos mértékben párhuzamot állíthatunk fel ezen theória és az egyenletes energiaeloszlásra alapitott theória közt. Az utóbbinak magva a közönséges statisztikus mechanika általánosan ismert alapelve, mely a RAYLEIGH-JEANS féle törvényre vezet; a sugárzásnak előbbi revolutionárius felfogása a WIEN-féle törvényt eredményezi. Egyik elv sem képes a sugárzás problémáját megoldani egyedül. A menynyire nem helyes az egyik, annyira nem helyes a másik elv sem. Nagyon valószinű, hogy nem is a fényquantumtheória és az ætherhullámelmélet (melynek alapján számított ingadozás, mint azt az EINSTEIN-féle vizsgálatoknál láttuk, a RAYLEIGH-JEANS-féle formulát eredményezi) kombinációja, hanem egy új egységes univerzális természeti törvény fogja a sugárzás problémáját s vele együtt az anyagszerkezet rendkívüli nagyszámú kérdését megoldani.

Mindamellett nem érdektelen vizsgálni, hogy hozzávetőleg micsoda okok lehetnek azok, melyek miatt az EINSTEIN-féle fényquantumtheória a WIEN-féle érvényességi körön alul érvénytelen sugárzási formulát eredményez. Jogosultságunk e kérdés feltevésére æquivalens azon kérdés feltevésével, hogy mik azok az okok, a melyek miatt a RAYLEIGH-JEANS-féle formula alapelvei csak $\frac{\nu}{T}$ alacsony értékeire mutatnak fel a tapasztalattal egyező eredményeket. Míg azonban e kérdést számtalan oldalról vizsgálták, addig az előbbiről tudtommal az irodalomban még nem volt szó.

Gondoljunk e végből a «$h\nu\eta$» ingadozásérték levezetésénél (323. oldalon) tett feltevéseinkre. A leglényegesebb az, hogy az egyes «$h\nu$» quantumok egymástól *függetlenül* terjednek a térben tova. Kiindulópontunk továbbá az volt, hogy $d\nu$ spektralis intervallumot mindig választhatjuk úgy, hogy a «v» térfogatban foglalt energia középértéke kicsiny legyen «$h\nu$»-höz. A fényquantumtheória szerint a V térben csupa különböző ν frequentiájú quantumok vannak, melyek azonban mind ν és $\nu + d\nu$ értékek közt foglalnak helyet. Ezen quantumok közt szigorúan véve nincs kettő egyforma, éppen úgy, mint egy gáz molekuláinak sebességei közt sincs kettő, a melyik szigorúan egyenlő, hanem azon quantumok, melyek ν és $\nu + d\nu$ intervallumba esnek, frequentiára nézve egyenletesen beosztják a $d\nu$ intervallumot.[1] Minthogy az egyes quantumok egymástól függetlenek, a $d\nu$ intervallum szűkítésének semmi akadálya sincs; ha azonban az egyes rendkívül közel eső (bizonyos határon belül) quantumokra *e függetlenséget tagadjuk*, a «$d\nu$» szűkítésének határt kell szabnunk, mi által oly esetekre, mikor feltevéseink által követelt $d\nu$ intervallum egy bizonyos határon alul marad, következtetéseink érvénytelenek. Hogy világosabban lássuk a dolgot, gondoljuk, teszem fel például azt, hogy egy ν és egy $\nu + \Delta\nu$ frequentiájú quantum össze van úgy kapcsolva, hogy a kettő mozgásuk közben mindig együtt van. Ha most egy oly kis $d\nu$ intervallumot választunk, hogy

$$d\nu < \Delta\nu,$$

akkor a fentebbi két quantumból, melyek mindig együtt szerepelnek, egyik föltétlenül ki fog maradni és egy másik $d\nu_1$ intervallumba fog beleesni. Ennélfogva van két sugárzási intervallumunk, melyek *egymástól nem függetlenek*, ingadozásaik tehát nem additionális (összeadható) mennyiségek és így a már eleve tett feltevésünk, hogy az ingadozás quadratikus értéke $d\nu$-vel arányos, önmagától elesik.

Nem szükséges azonban ezt a kérdést az ingadozás alapján pertraktálni. Tekintsük az előbb említett két intervallum entropiáját. Tudjuk, hogy egymástól nem független rendszerek entropiái nem additiv mennyiségek; a «v» térfogatba foglalt sugárzás entropiája ennélfogva nem lesz a két intervallum entropiáinak összege s a sugárzási entropia egy bizonyos határ-

---

[1] Mindenesetre felteszszük, hogy V oly nagy, hogy abban rendkívüli sok ν és $\nu + d\nu$ közé eső fényquantum van.

intervallumon alul már nem lesz arányos a $d\nu$-vel, a mivel az erre alapitott EINSTEIN-féle következtetések érvénytelenekké válnak. Egymástól nem független rendszerek pedig nem új dolgok a thermodynamikában speciálisan a sugárzást illetőleg. LAUE[1] kimutatta, hogy két kohærens fénysugár közös entropiája nem a két fénysugár külön entropiáinak az összege, hanem annál mindig kisebb, a mi nyilvánvalóan annak a következménye, hogy a két fénysugár egymástól nem független, valószinűségeik tehát nem multiplikatio útján szolgáltatják az eredő valószinűséget s így a BOLTZMANN-féle elv alapján az entropiák nem összegezhetők. Nem nehéz elképzelni, hogy az EINSTEIN-féle energiaingadozásnak a második részét (lásd 321. oldal (10) egyenlet) épen ily egymástól *nem* független frequentiák szolgáltatják. A hullámelméletet tekintve alapul, az egymáshoz igen közel álló frequentiákkal rendelkező hullámok az ingadozás szempontjából, hogy úgy mondjuk, kohærenseknek tekinthetők, mivel az ingadozás quadratikus közepének az értékéhez nyilván egy részt szolgáltatnak. *Ily kohaerentia pedig az* EINSTEIN-*féle fényquantumtheóriából ki van zárva.*

Hogy az egyes igen közelálló sugárzásnemek nem függetlenek egymástól, erre mutat PLANCK-nak az a kijelentése is, hogy a spektroszkópoknak felbontó képességeit nem lehet vég nélkül fokozni, mert ennek bizonyos határán alul már összeütközésbe kell hogy jussunk a thermodynamika II. főtételével. Ez nyilván arra vonatkozhatik, hogy egy $d\nu$ intervallum szétválasztása után az egyes szétválasztott elemek thermodynamikai szempontból már nem függetlenek egymástól, tehát entropiáik sem összegezhető mennyiségek. Röviden s mintegy népszerűen rekapitulálva az eredményeket: az EINSTEIN-féle fényquantumtheória egyes sugárzási elemei *túlságosan* függetlenek egymástól s talán másoldalról az ætherhullámtheória sugárzási elemei pedig nagyon is *kevés* függetlenséggel birnak.

---

[1] Lásd LAUE: Ann. d. Physik 1906. 20. 365. oldal és Ann. d. Physik 1907. 23. 1. oldal.

A következőkben czélunk megmutatni, hogy az EINSTEIN-féle fényquantumtheória, mely tudvalevőleg a WIEN-féle sugárzási formulát eredményezi, milyen modifikatióval vezet a PLANCK-féle formulára. A modifikatiónak alapja, mint már előzőleg kifejtettük, az lesz, hogy az egyes «$h\nu$» quantumok függetlenségét megszorítjuk.

Válaszszunk egy V térfogatú teljesen diffus reflektáló falakkal ellátott üreget, a melybe egy ρ specifikus sűrűségű és ν frequentiájú monochromatikus fekete sugárzás van bezárva $d\nu$ frequentia-intervallummal. Álljon a sugárzás N darab

$$\varepsilon = h\nu$$

nagyságú quantumból, a melyek azonban nem mind önállóak, hanem vannak köztük associált quantumok is, tehát olyanok, a melyeknek energiája $2h\nu$, $3h\nu$... és így tovább. Válaszszuk a V térfogatot az egységnek, a mi nem esik az általánosság rovására és szemeljünk ki egy kis «v» térfogatot, mely a V-hez képest elenyészően kicsiny, de a hullámhosszhoz képest mégis nagy. Minthogy V az egység,

$$\rho d\nu = N\varepsilon$$

s így a v térfogatban foglalt energia középértéke

$$\eta = \rho v d\nu = N\varepsilon v.$$

Képezzük most azokat az energiaértékeket, melyeket az egyes ε, 2ε, 3ε, stb. energiafajok külön alkotnak, a következő alaphypothezissel: az egész N számú energiaelemnek egy «a»-szorosa (a valódi tört) képezi az első fajt, melynek quantumai tehát $1 . \varepsilon$ értékkel birnak, a megmaradt rész «a»-szorosa a második fajt (2ε), a most megmaradt rész «a»-szorosa a harmadikat (3ε) és így tovább. A V térfogatban tehát van

$$\begin{array}{llll}
1 . \varepsilon & \text{fajú} & \text{energia} & Na . \varepsilon \\
2 . \varepsilon & « & « & N(1-a)\,a . \varepsilon \\
3 . \varepsilon & « & « & N(1-a)^2\,a . \varepsilon \\
\vdots & & & \vdots \\
n . \varepsilon & « & « & N(1-a)^{n-1}\,a . \varepsilon .
\end{array} \tag{12}$$

A v-ben foglalt energiák középértékei a (12)-ből egyszerűen «v»-vel való szorzás útján adódnak.

Ha az egyes energiafajok elemeit tekintjük, akkor azok nyilván egymástól már függetlenek; ingadozásaik külön-külön kiszámíthatók a 324. oldalon már vázolt eljárás alapján. Az egyes fajok számitott quadratikus ingadozásai középértékben pedig ugyancsak a függetlenség miatt egyszerűen összeadva szolgáltatják a kivánt sugárzásbeli ingadozást. Hogy a már említett eljárást követhessük, $d\nu$ intervallumot ismét oly szűkre kell választani, hogy a «v» térfogatba eső energiaközépérték az egyes fajokra nézve igen kicsiny legyen azon faj energiaquantumához képest. Könnyen belátható, hogy ha ez az első fajra teljesítve van, a többire már eo ipso következik.

Az egyes energiafajoknak számai a (12) tekintetbe vételével

$$\begin{array}{llll} 1\,.\,\varepsilon & \text{fajú van} & Na & \text{számú} \\ 2\,.\,\varepsilon & \text{«} \quad \text{«} & \frac{1}{2}N(1-a)\,a & \text{«} \\ 3\,.\,\varepsilon & \text{«} \quad \text{«} & \frac{1}{3}N(1-a)^2\,a & \text{«} \\ \vdots & & \vdots & \\ n\,.\,\varepsilon & \text{«} \quad \text{«} & \frac{1}{n}N(1-a)^{n-1}\,a & \text{«} \end{array} \qquad (13)$$

Az első fajú quantumok quadratikus energiaingadozása a 324. oldalon levő eljárás alapján (középértékben)

$$\overline{E_1^2} = \varepsilon^2 \frac{t}{T},$$

hol t és T jelentései ugyanott találhatók.

$$\varepsilon^2 \frac{t}{T} = \varepsilon\,.\,\varepsilon \frac{t}{T};$$

$\varepsilon \frac{t}{T}$ lesz a «v» térfogat energiaközépértéke, mely a (12) alapján lesz:

$$Na\varepsilon v.$$

$\frac{t}{T}$ jelentése rögtön látható; egyenlő a «v» térfogatban foglalt quantumok számával. Egész analóg módon számíthatók a többi fajok ingadozásközépértékei is.

$$\overline{E_1^2} = \varepsilon^2 . \frac{N\nu a}{1} = N\nu a \, . \, \varepsilon^2$$

$$\overline{E_2^2} = 2^2\varepsilon^2 \frac{N\nu\,(1-a)\,a}{2} = 2 \, . \, N\nu\,(1-a)\,a\varepsilon^2$$

$$\vdots$$

$$\overline{E_n^2} = n^2\varepsilon^2 \frac{N\nu\,(1-a)^{n-1}a}{n} = nN\nu\,(1-a)^{n-1}a\varepsilon^2 .$$

Az eredő ingadozás quadratikus közepe

$$\overline{E^2} = \sum_1^{\infty} {}^n \, \overline{E_n^2} =$$

$$= a\rho_\nu d\nu \, . \, \varepsilon \, \Big| \, 1+2\,(1-a)+3\,(1-a)^2+\cdots n\,(1-a)^{n-1} \Big|_{n=\infty} .$$

Legközelebbi feladatunk ezen sor limesének kiszámitása. Legyen rövidség kedvéért $1-a=a$, akkor e sor így írható:

$$\begin{array}{l} 1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots \\ \quad a+a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots \\ \qquad a^2+\cdots+a^{n-1}+\cdots \\ \qquad\quad \vdots \end{array}$$

Az összeg véges n számú tagja a sorból:

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{a-a^n}{1-a} + \frac{a^2-a^n}{1-a} + \cdots$$

Ennek limese $n=$ végtelen esetre, lévén «a» valódi tört:

$$\frac{1}{1-a} \, \Big| \, 1+a+a^2+\cdots a^n+\cdots \Big|_{n=\infty} = \left(\frac{1}{1-a}\right)^2$$

$$= \frac{1}{a^2} .$$

Helyettesítve ezt $\overline{E^2}$ értékébe, nyerjük

$$\overline{E^2} = \varepsilon \, . \, \rho_\nu d\nu \cdot \frac{1}{a} = h\nu\rho_\nu d\nu \cdot \frac{1}{a} \cdot$$

Ha most a-ra azt a hypothetikus feltevést teszszük, a mely PLANCK új sugárzási theóriájában[1] is található, akkor az ingadozásra a PLANCK-formula 321-ik lapon talált ingadozási értékét nyerjük (10. egyenlet). Ezen hypothezis a mi esetünkre így szól: azon $h\nu$ quantumok száma, a melyek associálva vannak, viszonyítva azoknak számához, melyek egyedül vannak, mindig egy oly értéket mutat, mely arányos a sugárzásbeli energiasűrűséggel; ennélfogva:

$$\frac{1-a}{a} = p\rho, \tag{14}$$

hol p egy még közelebbről megválasztandó függvénye a ν frequentiának. A (14)-ből

$$a = \frac{1}{1+p\rho};$$

$\overline{E^2}$ értékébe ezt helyettesitve

$$\overline{E^2} = h\nu\rho v d\nu (1+p\rho) = (h\nu\rho + h\nu \,.\, p\rho^2) v d\nu.$$

Hogy az egyezés a PLANCK-formula által szolgáltatott ingadozási értékkel fennálljon, p úgy választandó, hogy legyen:

$$p = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3}. \tag{15}$$

Az ingadazás így nyert értékéből az EINSTEIN-féle differentiálegyenlet révén (321. oldal 9. egyenlet) a PLANCK-féle formula nyerhető. A számitás egészen úgy végzendő, mint azt a 325-ik oldalon a WIEN-féle sugárzási formula előállításánál láttuk.

Megmutattuk tehát, hogy az EINSTEIN-féle atomisztikus fénytheória képes az ingadozás másik részét is megmagyarázni (azaz a PLANCK-féle formulához vezet), ha a sugárzás *paramétereinek függetlenségét megszorítjuk*. Közelfekvő most már az

[1] Lásd M. PLANCK: Ann. d. Physik 1912. 643. oldal. A quantumtheória ilyetén való modifikálására az impulsust ez a munka adta. PLANCK theóriája azonban egész más irányú, t. i. csillapodásnélküli resonatorokra van alapitva. A hypothеziseink nagyjában hasonlítanak PLANCKéihoz. Lásd 315. oldal.

a kérdés, vajjon nem lehetne e ugyanezt elérni az ætherhullámtheóriával is? E theória szerint a térbeli energiarészek egymástól nem függetlenek, a mint azt a tapasztalás is mutatja. Gondoljunk csak egy igen kicsiny felületelemről két szomszédos elemi kúpszögben kibocsátott sugárzás *kohaerentiájára*. Azonban az kérdéses, hogy az ilyen függésnek (egyelőre még ismeretlen) quantitativ mértéke a valóságban is tényleg olyan, mint azt a theória szolgáltatná? Talán, — analog a fényquantumtheóriához, — az ætherhullámtheóriában lép fel valami diskontinuitás, mely a sugárzási részek egymástól való függését olyképen modifikálja, hogy az így keletkezett új elmélet az egész Planck-féle ingadozást képes megmagyarázni. Ez a kérdés további behatóbb vizsgálatoknak volna tárgya.

Következtetések a Planck-féle sugárzási theóriából.

Az előbb látott fényquantumtheóriából, mely a Planck-féle formulát állítja elő, azt a benyomást nyerhetjük, hogy ha nem is fogadjuk el a fénynek ilyen atomisztikus elméletét, a sugárzás konstitutiójában valószinűleg *van valami diskontinuitás*. Már Einstein [1] is említi, hogy az elektrodynamika hullámegyenletében léphet esetleg fel egy eddig ismeretlen diskontinuitás. Dimenzionális következtetések után lehetőnek tartja, hogy valamilyen módon az elemi elektromos quantumot tartalmazza, eddig még ismeretlen módon a hullámegyenlet, de úgy, hogy alacsony ν értékekre ez az elektrodynamika közönséges hullámegyenletébe megy át. Valószinűnek tartjuk, hogy a sugárzásbeli diskontinuitás nem energiákban nyilvánul (pl. a fényquantumok), hanem a térnek valami más tulajdonságaiban. Lehetséges, hogy itt is érvényes, a mint Sommerfeld felteszi az absorbeáló és emittáló modellekre,[2] hogy egy ily mo-

---

[1] A. Einstein: Phys. Zeitschrift 1909. X. 185. oldal; lásd ezen értekezés végét.

[2] Sommerfeld: Physik. Zeitschrift 1911. XII. 1057. oldal.

dellnél egy a mechanikában *működésnek* ismert mennyiség jellegével biró jellemző bir univerzális tulajdonságokkal. (Mert a «h» univerzális konstans a működés jellegével [energia $\times$ idő] bir.) Ha túlzók akarunk lenni, azt is gondolhatjuk, hogy nem is az anyag bir egy ily univerzális tulajdonsággal, hanem egyenesen maga a fényæther.

Ilyen okoskodások azonban még kellő alap nélkül kalandos irányba vezethetnének bennünket. Nem szándékunk ezen eshetőségeket fejtegetni, hanem csupán azt akarjuk megmutatni, hogy a Planck-féle sugárzási theória *szigorúan* véve, szintén rejt magában bizonyos diskontinuitásokat magára a sugárzásra nézve.

A Planck-féle theória egyik alapelve, mely a közönséges elektrodynamikán nyugszik, az, hogy egy resonator ρ energiasűrűségű stationarius sugárzás terében oly U energiaértékhez közeledik mint egyensúlyi helyzethez, a mely a ρ specifikus sűrűséggel a következőkép függ össze (lásd 299. és 302. oldal)

$$U = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho. \tag{16}$$

Ha a resonator szigorúan az elektrodynamika törvényeit követi, akkor a (16) egyenletnek fenn kell állani, ha a resonatornak van ideje ez egyensúlyi állapotot felvenni. A Planck-féle hypothezis értelmében egy resonátor energiája vagy 0, vagy $h\nu$ valamely egész számú többszöröse lehet; pontosabban: a mikor az energia lényegesen eltér az említett diszkrét energiaquantumok értékétől, azon idők tartama középértékben kicsiny kell hogy legyen azon középidőhöz képest, a mely alatt egy resonator energiája egy határozott quantum. Ha a (16) alatt szereplő elektrodynamikai törvény szigorúan fennáll, akkor a sugárzás energiasűrűsége is csak egyes diskontinuus értékekből állhat, még pedig olyanokból, a melyek a (16) alapján $h\nu$, $2h\nu$, stb. resonatorenergiáknak épen megfelelnek. Pl. ha a resonator momentán «$h\nu$» energiaértéket mutat fel, akkor

$$h\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho_{h\nu},$$

azaz a resonator helyén az energiasűrűség

$$\rho_{h\nu} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3};$$

$2h\nu$ energiaértéknél ennek kétszerese, $3h\nu$-nél háromszorosa jelenik meg és így tovább. Vezessük be ν helyett a hullámhosszat λ-t:

$$\rho_{h\nu} = \frac{8\pi h}{\lambda^3}. \tag{17}$$

Ez szavakban kifejezve a következő érdekes relációt fejezi ki: ha a Planck-féle theória alapelveit teljesen szigorúan az elektrodynamika elveinek pontos szem előtt tartásával értelmezzük, akkor *egy hullámköbben* (egy hullámhossz oldalakkal biró koczka) *foglalt energia értéke mindig csak* $8\pi h$-*nak egész számú többszöröse lehet*, a zérust sem kivéve. Magától értetődik, hogy csak akkor áll ez, ha az egész hullámköbben mindenütt oly viszonyok állnak fel, mint épen a hullámköbben levő resonátor helyén.

A Planck-féle theóriának ez a következménye szintén egy sugárzásbeli diskontinuitást árul el, de egész más karakterű, mint a fényquantumtheória. Mert ez a sugárzás tovaterjedésének módjára és egyes energiaterek nagyságára semmi kikötést nem tesz és így a további spekuláczióknak tág teret nyithat.

Hogy talán ezek a vonatkozások nem véletlenek, hanem esetleg magának a sugárzási energiának valami univerzális tulajdonságát rejtik magukban, azt mutatja az az érdekes összefüggés, a mely az előbbi modifikált fényquantumtheória p-je és a (17) alatt előállított $\rho_{h\nu}$ érték közt fennáll;

$$p = \frac{1}{\rho_{h\nu}}.$$

(Megjegyzendő, hogy p tökéletesen azonos az új Planck-féle sugárzási theória[1] hasonlóan jelzett konstansával, mindamellett, hogy e theóriának alapjai a mienkétől lényegesen elütnek.) Ennek oka egyelőre még rejtély, mindenesetre azonban érdekes, hogy két teljesen különböző theória végeredményében mégis mily rokonságot képes felmutatni.

Conclusio.

A jelen dolgozat eredményét és czélját a következőkben kivánjuk összefoglalni:

1. Az Einstein-féle ingadozási theória módot nyujt arra, hogy egy sugárzás quadratikus ingadozását kiszámithassuk, ha ismeretes a spektrálegyenlet. Ez az eljárás megfordítható; ha valami módon egy adott sugárzás quadratikus ingadozását (középértékben) ismerjük, akkor ebből előállitható a sugárzási formula, vagyis a spektrálegyenlet. Kimutattuk egyszerű úton, hogy az ú. n. fényquantumtheória mint állitja elő a Planck-formulára alapított ingadozásnak az első részét, a mely tudvalevőleg (mint ki is mutattuk) a Wien-féle sugárzási törvényre vezet.

2. Az általános felfogás az, hogy, a mint az ætherhullámtheoria a Planck-formula ingadozásának csak a második részét tudja megmagyarázni, addig a fényquantumtheória ennek első részét igazolja. Vagyis az ætherhullámtheória a Rayleigh-Jeans-formulára vezet, a fényquantumtheória pedig a Wien-féle sugárzási formulára. Megmutattuk, hogy a fényquantumtheória alkalmas modifikatióval képes az egész Planck-formula által szolgáltatott ingadozást megmagyarázni, vagyis *a fényquantumtheória is vezethet alkalmas hypothezisekkel a* Planck-*féle formulához.* Nem akarjuk ezt a Planck-féle formula egy levezetésének tekinteni, mivelhogy nem vagyunk hívei a fényquantumtheóriának. Csupán csak azt akartuk kimutatni, hogy a sugárzás konstitutiójára téve feltevéseket (hogy milyenek azok, az mellékes), ily módon is elő lehet állítani a Planck-féle

[1] M. Planck: Ann. d. Physik 1912. 643. oldal.

formulát. Hypotheziseink jogosultságára pedig szolgál az a körülmény, hogy nagyon hasonlók Planck új sugárzási theóriájának feltevéseihez; csakhogy a míg a Planck-féle theória (az új és a régi is) sugárzó modelleken nyugszik, addig az általunk készitett előállítás tisztán a sugárzás egy konstitutiójára (fényquantumtheória) van alapitva. Főczélunk az említett modifikatióval, hogy a sugárzási elemek egymástól való *függésének* vagy *függetlenségének* kérdésével a sugárzási probléma megoldásának egy új lehetőségét mutassuk be.

3. Mint már emlitettük, levezetésünket a Planck-féle formulára vonatkozólag nem akarjuk theóriajellegűnek tartani, mivel nem hiszszük, hogy a sugárzás konstitutiója tényleg az Einstein-féle fényquantumokon alapulna. Az eddigi sugárzási vizsgálatok mind a sugárzó modelleken alapultak s kiderítették, hogy a sugárzási modellek viselkedésében kell valami *diskontinuitásnak* lenni, *mely valószinűleg nem is ezen modellek absorptiójában vagy emissiójában rejlik.* Mi az eddigiek alapján azon sejtelmünket akarjuk igazolni, hogy a sugárzás helyes theóriája talán nem is a modellek viselkedésében rejlik, hanem *magában a sugárzásban kell valami diskontinuitásnak lenni,* a mely — több mint bizonyos — hogy nem a fényquantumok alakjában nyer kifejezést. Más szóval nem a sugárzó modellekben (resonatorok, atomok) keresendő esetleg egy eddig ismeretlen, a mechanikával és az elektrodynamikával meg nem egyeztethető természeti törvény, hanem magának a fénynek természetét kell törekednünk valahogy másképen elképzelni, a mely mai felfogásunktól lényegesen különbözzék. Jelen értekezésünk végén a Planck-féle theória alapján próbáltunk egy módot mutatni a sugárzás konstitutiójának elképzelésére, a melyben a sugárzás energiasűrűsége kell hogy diskontinuusan változzék, míg a sugárzási modellek az elektrodynamika törvényeinek szigorúan engedelmeskednek. Ez a sugárzási diskontinuitás, mely a szigorúan vett Planck-féle sugárzási theória (első) következménye, lényegesen más, mint a fényquantumtheóriában rejlő diskontinuitás.

Tomits Iván.

A LÖKÉSHULLÁMOK ELMÉLETÉHEZ.

RIEMANN-nak klasszikus munkája a mathematikai, fizikai parcziális differencziálegyenleteiről nemrég immár ötödik kiadásában került ki a sajtó alól.[1] A kitűnő, minden elméleti fizikusnak nélkülözhetetlen művet ismét HEINRICH WEBER, a strassburgi egyetem mathematika-tanára dolgozta át és igyekezett az újabb kutatások eredményeit is értékesiteni. Azonban még mindig maradt a könyvben egy fejezet (II. kötet, 481. és köv. l.), mely véleményem szerint most sem felel meg a mai fizikai felfogásnak. Értem a nem folytonos mozgásról szóló fejezetet, melynek a megelőző (1901-es) kiadásban való kidolgozását az «*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*»-ben megjelent referátumomban kifogásoltam.[2] Részben e dolgozat hatása alatt WEBER e fejezetet az új kiadásban lényegesen átdolgozta, ámde fejtegetéseinek egy részét most sem helyeselhetem s ezért a következőkben közlöm a kérdésre vonatkozó felfogásomat.

RIEMANN «*Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*»[3] czímű hires értekezésében oly egydimenziós gázmozgásokat vizsgált, a melyeknél a sebesség és a sűrűség rohamos változást, véges szakadást szenvednek. Az így keletkezett ugrásszerű változások RIEMANN szerint tova-

---

[1] Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, nach RIEMANNS Vorlesungen in fünfter Auflage bearbeitet von H. WEBER, két kötet, Braunschweig 1911—1912.

[2] Encykl. der math. Wiss. IV. kötet, 3. rész, 282—323. (1905).

[3] Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (math. phys. Kasse), 8. k. 43. l. (1860) és RIEMANN, Werke, Leipzig, 1876. 144. l,

terjedhetnek s az ú. n. *lökéshullámokat* alkotják, melyekről e lapok hasábjain már volt alkalmam régebben megemlékezni.[1] Ha a hullám a ritkább gázrétegek felé terjed, akkor neve *sűrítő lökés,* ellenkező esetben pedig *ritkító lökés.*

RIEMANN a lökéshullámoknak egész elméletét ama föltevés mellett dolgozta ki, hogy az egész gázban a p nyomás egyedül a ρ sűrűségnek a függvénye, még pedig a *szakadás-felület mindkét oldalán ugyanaz a függvénykapcsolat köti a* ρ*-t a* p*-hez.* Ha pl. föltesszük, hogy a cső fala a hőt nem ereszti át és a gáz hővezetőképességét is elhanyagoljuk, akkor a POISSON-féle adiabatikus állapotegyenlet lesz érvényes:

$$p = a^2\rho^k \qquad (1)$$

a hol k az állandó nyomás és állandó térfogat melletti fajhő hányadosa, a^2 *pedig az egész gázban állandó számérték, mely* RIEMANN *szerint a lökéshullám átvonulásakor sem szenved változást.*

A RIEMANN-féle előadások IV. kiadásában (II. kötet 469. és köv. l.) H. WEBER híven ragaszkodott a RIEMANN-féle tárgyalásmódhoz, habár már LORD RAYLEIGH figyelmeztetett reá,[2] hogy RIEMANN elmélete eredeti alakjában az energia megmaradása elvének ellenmond. Már a negyedik kiadásban WEBER részletesen foglalkozik LORD RAYLEIGH ellenvetésével és czáfolatára idézi az ú. n. CARNOT-féle tételt,[3] mely szerint «az oly mechanikai rendszerben, melyben a rendszer föltételei következtében a sebesség pillanati megváltozást szenved, mindig energiaveszteség áll be». Példaként WEBER a nyugvó merev síkra hulló merev rugalmatlan testet említi, mely a síkkal való ütközése által mozgásenergiáját teljesen elveszti. Ebből a CARNOT-féle tételből most már H. WEBER arra következtet, hogy a gázban

---

[1] Folyadékokban végbemenő nem folytonos mozgásokról, Math. és phys. Lapok, 14. kötet 361—390. l. (1905).

[2] LORD RAYLEIGH, Theory of sound, II. kiadás, II. kötet, 32. l., London, 1896.

[3] RIEMANN-WEBER, IV. kiadás, II. kötet, 494. l.

csupán sürítő lökések terjedhetnek tova, melyeknél mechanikai energiaveszteség áll be, míg a ritkító lökések — az előbbiek megfordításai — lehetetlenek, mert ezek energianövekedéssel járnának.

A fizikust természetesen a CARNOT-féle tétel segítségül hivása nem fogja kielégíteni, mert föltétlenül az «elveszett» energia sorsa iránt fog érdeklődni és kimutatni fogja, milyen másnemű energiává alakult át, mert természetesen nyomtalan elveszésről nem lehet szó.

Több kutató helyesen tárgyalta ily irányban a feladatot, kiknek vizsgálatait az említett Encyklopédia-referátumomban ismertettem. Első sorban H. HUGONIOT-t kell megneveznem, ki RIEMANN-tól függetlenül a lökéshullámoknak egész elméletét fölépítette,[1] még pedig tökéletes összhangzásban az energia megmaradásának elvével.

A jelenség szerkezetébe azonban csak termodinámikai megfontolások alapján fogunk bevilágíthatni: nevezetesen segítségül kell hívnunk a termodinamika második főtételét, az entrópia tételét, még pedig — úgy vélem — a legegyszerűbben a következő úton, melyet még 1905-ben jelöltem ki egy a párizsi akadémia «Comptes rendus»-iben megjelent dolgozatomban.[2]

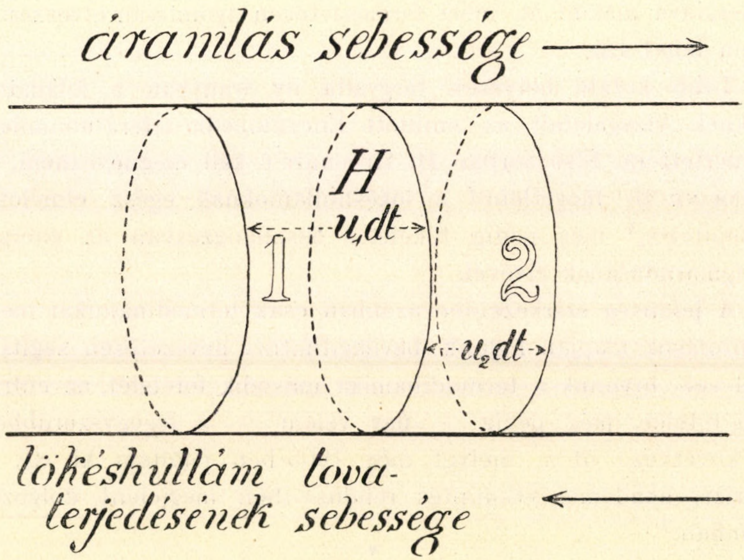
*

Vizsgáljunk egy ú. n. staczionárius lökéshullámot, melynél a gázáramlás sebessége a hullám tovaterjedéssebességével egyenlő, de vele ellenkező irányú, úgy hogy a hullámfelület a térben állva marad, tehát nem lehet mozgásenergiának forrása. Jelöljük p_1, ρ_1, u_1-gyel a gáz állapotjelzőit és sebességét a H hullámfelülettől balra (l. az ábrát) az első tartományban, míg ugyane mennyiségek jelei a második tartományban, a hullámfelülettől jobbra legyenek p_2, ρ_2 és u_2. Tegyük fel pl., hogy a

[1] H. HUGONIOT: Journal de l'école polytechnique, cahier 57, 15. lap (1887) és cahier 58, 1. lap (1889).

[2] Comptes rendus 141. k, 710 l. Páris, 1905.

gáz az első tartományból a második tartomány felé áramlik, tehát akkor a hullámfelület jobbról balfelé fut. A kontinuitás tétele (anyag megmaradásának elve), a NEWTON-féle második axióma és az energia megmaradásának elve egy-egy kapcsolatot szolgáltatnak az egy és két indexű mennyiségek között, úgy, hogy ha pl. az egy indexű mennyiségeket megadjuk, belő-



1. ábra.

lük e három egyenlet alapján a két indexűek kiszámíthatók. Állítsuk fel e három egyenletet:

I. A H felületen dt idő alatt áramlik balról az u_1dt magasságú hengerben foglalt $\rho_1 u_1 dtF$ tömeg, a hol F a cső keresztmetszete, melyet a továbbiakban — az általánosság megszorítása nélkül — az egységgel egyenlőnek vehetünk. A lökéshullám hatása alatt a sebesség és a sűrűség megváltozik ugyan, de a staczionárius állapot csak úgy maradhat fenn, ha a H felületről a második tartomány felé dt idő alatt ugyanaz az anyagmennyiség távozik el, mint a mely az első tartomány felől rajta keresztül áramlott. Az előbbi egyenlő az $u_2 dt$ magasságú hengerben foglalt tömeggel $\rho_2 u_2 dt$-vel, tehát

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \qquad \text{(I.)}$$

II. A H felületen dt idő alatt áthaladó tömegre ($\rho_1 u_1 dt$-re) alkalmazzuk NEWTON második axiómáját abban az alakjában, a mely az impulzus tétele néven ismeretes: az erő és az időelem szorzata egyenlő a mozgásmennyiség megváltozásával. A szóban forgó tömegre a dt idő alatt a $p_1 - p_2$ erő hat, p_1 a hengernek baloldali, $-p_2$ jobboldali alapjára), tehát:

$$p_1 - p_2 = \rho_1 u_1 (u_2 - u_1). \qquad \text{(II.)}$$

III. Alkalmazzuk végre a H felületen dt idő alatt áthaladó tömegre az energia megmaradásának tételét (a termodinámika első főtételét), mely szerint a külső erőknek δL munkája egyenlő a belső energia növekedésének (δU) és a mozgásenergia növekedésének (δT) összegével.

δL két részből áll: a p_1 balról ható és a $-p_2$ jobbról ható erők munkájából, az előbbi útja $u_1 dt$, ez utóbbié $u_2 dt$, tehát:

$$\delta L = p_1 u_1 dt - p_2 u_2 dt \qquad (2)$$

Mint ismeretes, egy ideális gáz tömegegységének belső energiája:

$$U = \frac{1}{k-1} \frac{p}{\rho} \qquad (3)$$

úgy, hogy:

$$\left.\begin{aligned} \delta U &= \rho_1 u_1 dt \cdot \frac{1}{k-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \text{(tekintettel I.-re)} \\ &= \frac{1}{k-1} (p_2 u_2 - p_1 u_1)\, dt = \text{(tekintettel (2)-re)} \\ &= -\frac{\delta L}{k-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

végre

$$\delta T = \rho_1 u_1 dt\, (u^{2}\, u_1^2); \qquad (5)$$

behelyettesitve δL, δU és δT értékeit a

$$\delta L = \delta U + \delta T$$

egyenletbe, azt nyerjük, hogy:

$$\frac{k}{k-1}(p_1u_1 - p_2u_2) = \frac{\rho_1 u_1}{2}(u_2^2 - u_1^2). \qquad \text{(III)}$$

Az I., II. és III. egyenletek azonnal meggyőznek bennünket róla, hogy a hullámfelületen való átvonulás közben a^2 nem maradhat változatlan és eldöntik azt a kérdést is, miért nem lehetségesek az ú. n. ritkító lökéshullámok.

Tegyük fel pl., hogy sürítő lökéshullám terjed a 2. tartományból az 1. felé, akkor

$$\rho_2 > \rho_1,$$

tehát az I. alapján, ha a balról jobb felé irányuló sebességet számítjuk pozitívnak:

$$u_2 < u_1,$$

tehát az eleven erőnek megváltozása, δT negatív lesz, épen így negatív lesz δL is, ámde δU lesz pozitív. Ugyanis a

$$\delta L = \delta U + \delta T$$

egyenletből, tekintettel a (4)-re az következik, hogy

$$\delta L + \frac{\delta L}{k-1} = \frac{k}{k-1}\delta L = \delta T$$

de k mindig nagyobb az egységnél, tehát δL és δT mindig egyenlő előjelűek, a (4) szerint pedig δL és δU előjele ellenkező.

Sűrítő lökéshullám esetében tehát a hullámfelületen átvonuló gáztömeg mozgásenergiája csökken, a mozgásenergia rovására pedig egyrészt munkavégzés történik a külső erők ellen, másrészt pedig megnövekszik a gáz belső energiája, tehát a gáz fölmelegszik. Ez a fölmelegedés azonban távolról sem adiabatikus állapotváltozás, mert hiszen nem a külső erők pozitív munkájának következménye, hiszen a gáz ellenkezőleg munkát végzett a külső erők ellen. Végeredményben tehát mozgásenergia változott át belső energiává, épen úgy, mint a surlódás jelensége alkalmával; ez a surlódáshő a jelen esetben a

$$\delta Q = \delta L - \delta T = -\frac{1}{k-1}\delta L$$

mennyiséggel egyenértékű, mely sűrítő lökéshullám esetében pozitív, a ritkító hullámnál azonban negatív volna.

A lökéshullám átvonulása e szerint nem adiabatikus jelenség, mert hiszen a gáz e közben *mozgásenergiájának rovására hőt vesz fel*, a tisztán adiabatikus változásokra érvényes

$$p = a^2\rho^k \tag{1}$$

egyenlet tehát a lökéshullám átvonulásának pillanatára nem alkalmazható; ez az (1) alatti egyenlet helyettesítendő a Hugoniot-féle III. egyenlettel, melyből közvetlen számítással is igazolható, hogy a^2 a lökéshullám átvonulása által megváltozik. A gáznak állapotegyenlete tehát a 2. tartományban

$$p = a_2^2\rho^k$$

míg az 1. tartományban

$$p = a_1^2\rho^k,$$

a hol a_1 és a_2 *különböző* számértékek.

Világos továbbá, hogy a gázokban csakis sűrítő lökéshullámok terjedhetnek tova, míg ritkító lökéshullámok nem jöhetnek létre; hiszen láttuk, hogy a lökéshullámnál a surlódáshoz hasonló módon mozgásenergia alakul át hővé, a ritkító lökésnél azonban az ellenkező folyamatnak kellene végbemenni; ez utóbbi azonban a termodinámika második főtétele értelmében lehetetlen, hiszen a surlódás meg nem fordítható jelenség. Ámde a surlódás fogalmának bevonása nélkül is ugyanerre az eredményre jutunk: a hullámfelületen átvonuló gáztömeg hőt vesz fel, tehát *entrópiája* növekszik,[1] a gáz többi részei adiabatikus változást szenvednek, e szerint entrópiájuk változatlan marad, a sűrítő lökéshullám átvonulása tehát növeli az egész

[1] Valamely rendszer entrópiaváltozása, a közben, hogy a rendszer δQ hőmennyiséget vesz fel $\frac{\delta Q}{T}$, a hol T a rendszer hőmérséklete.

gáz entrópiáját; megfordítva a ritkító lökéshullám a gáz entrópiáját csökkentené, ez azonban éppen az említett második főtétel alapján lehetetlen.

A ritkító lökéshullámok lehetetlensége tehát semmiképen sem az energia megmaradásának elvéből (az első főtételből) következik — a mint H. Weber állítja — hanem a második főtételből a Carnot-Clausius-féle elvből. Egyébként is világos, hogy az első főtétel nem szabhatja meg az *irányát* valamely jelenségnek, ezt csak oly elv teheti, melynek matematikai kifejezésében *egyenlőtlenségi jel* szerepel.

*

Ezeket az ellenvetéseket H. Weber Riemann előadásainak legújabb kiadásában annyiban méltányolta, hogy Hugoniot elméletét, mint az eredeti Riemann-félével egyenlő jogosultságú felfogást szintén közli, a III. alatti egyenletet levezeti (II. kötet, 511. és köv. l.), sőt az a^2 mennyiségnek és a gáz entrópiájának a lökéshullám által okozott megváltozását közvetetlenül ki is számítja, igazolva ez által előrebocsátott fejtegetéseimet.

Azonban az 552. lapon a következőket olvassuk:

«Riemann *adiabatikusnak* tekintve a jelenséget, a nyomás és a térfogat közötti összefüggés számára a Poisson-féle $p = a^2\rho^k$ gyenletet vezette le és ezáltal nem folytonos mozgás esetében oly eredményekre jutott, a melyek az energia megmaradásának elvével össze nem egyeztethetők. Az $a^2 = p\rho^{-k}$ mennyiség állandóságának föltételezése oly törvényhez vezet, melyet az *entrópia megmaradásának* lehetne nevezni. Látjuk tehát, hogy e törvények, az energiának és az entrópiának megmaradása, nem mindég férnek össze egymással és hogy egy gázrészecskének a szakadásfelületen való áthaladása alkalmával vagy *energiaveszteségnek*, vagy pedig *entrópianyereségnek* kell bekövetkezni. Riemann leírásában az energia elvét adta fel, míg Hugoniot, Zemplén és mások az entrópia megmaradását ejtik el.»

E fejtegetésre mindenekelőtt megjegyzem, hogy nem csatlakozhatom a két elméletnek Weber-féle osztályozásához, illetve koordinálásához, mert hiszen a mai fizika csupán az *energia megmaradásának* és az *entrópia növekedésének* elvét ismeri, az entrópia *megmaradásának* elve azonban ismeretlen. Minden fizikai elméletnek tehát feltétlenül ki kell elégíteni az energia megmaradásának elvét, de nem szabad azt követelni, hogy az entrópia megmaradásának elve is kielégíttessék. Véleményem szerint tehát a RIEMANN és a HUGONIOT-féle elméletek nem «egyenlő jogosultságú megközelitései a valóságnak,» a mint WEBER állítja (553. l.), hanem ellenkezőleg az eredeti RIEMANN-féle föltevést (a^2 állandóságát) a hullámfelületen magán ell kell ejtenünk és a HUGONIOT-féle III. alatti egyenlettel kell pótolnunk. Be fogom ugyanis bizonyitani, hogy *magának* WEBER-nek a RIEMANN-*féle föltevésen alapuló fejtegetései szükségszerűen arra az eredményre vezetnek, hogy* a^2 *a hullámfelület átvonulásakor megváltozik.*

I. WEBER elismeri, hogy a RIEMANN-féle elméletben a sűrítő lökéshullám energiaveszteséggel jár és elmélkedik a fölött, mivé alakulhatott át ez az elveszett energia. Az 553. és az 557. lapon ama véleményének ad kifejezést, hogy az elveszett energia egyenértéke ama forrongó (turbulens) mozgások energiájában keresendő, a melyeket a lökéshullám előidéz, melyek azonban — mint ő maga megjegyzi — számítással nem követhetők. Ámde ilyen forrongó mozgás esetében — a mikor u_1 és u_2 a hely és idő szerint rohamosan változó sebességek középértékeit jelentik — a II. alatti egyenlet is érvényét veszti, mert nem lineáris az u-kban, az $u_1 u_2$ és u_1^2, u_2^2 középértékei pedig nem egyenlők a középértékek kettős szorzatával, illetve négyzeteivel. Ha tehát forrongó mozgásállapotból indulnánk ki, akkor az egész elméletet új alapokon kellene felépítenünk, pedig eddig még a *folytonos* forrongó mozgásokkal sem tudott a hidrodinámika megbirkózni.

A végleges és egészen általános döntés azonban a termodinámikának köszönhető, még pedig a következők alapján.

II. Maga WEBER a CARNOT-féle mechanikai tétel alapján a *sűrítő lökést meg nem fordítható jelenségnek minősíti,* mert hiszen a megfordítása, a ritkító lökés energianyereséggel járna. Ámde ismeretes — hiszen ez a termodinámika második főtételének lényege — hogy az entrópia állandósága nemcsak elegendő, de szükséges föltétele is valamely jelenség megfordíthatóságának. Abból tehát, hogy valamely jelenség meg nem fordítható, szükségképen következik az entrópiának a növekedése. A gáz entrópiájának e szerint a sűrítő lökéshullám áthaladásakor növekednie kell, növekedni fog tehát az a^2 mennyiség is.[1] Sajnálatomra tehát nem érthetek egyet WEBER-nek a második kötet előszavában tett kijelentésével, mely szerint «a levegőlökések RIEMANN-féle elméletének az a fogalmazása, a melyet én (H. WEBER) a megelőző (negyedik) kiadásban közöltem, mégis fenntartható». Hasonló értelmű megjegyzés olvasható a mű utolsó (562) lapján is.

*

A megelőző fejtegetésekben többször beszéltünk surlódáshővé átalakult mozgásenergiáról, pedig a lökéshullámoknak egész RIEMANN-féle elmélete súrlódásnélküli jelenségekre vonatkozik és az egész tárgyalásban az ideális folyadékok mozgásegyenletei nyernek alkalmazást. Ez azonban csak látszólagos ellenmondás. A surlódás elhanyagolása annyit jelent, hogy az η belső súrlódás-együtthatót igen kicsinynek tekintjük, tehát a vele szorzott *véges* mennyiségeket elhanyagolhatjuk; a belső surlódás munkája $\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$-tel arányos, a hol x az áramlás irányában mért koordináta, e szerint mindenütt elhanyagolható, a hol a mozgás folytonos, ámde a hullámfelületben magában

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\infty$$

tehát a surlódáshő, egy igen kicsiny és egy igen nagy szám szorzata, már nem lesz elhanyagolható.

Zemplén Győző.

[1] A tömegegység S entrópiája és az a^2 mennyiség közt ugyanis a következő rendkívül egyszerű kapcsolat van:

$$S=c_v \log a^2$$

a hol c_v a gáz fajheve állandó nyomás mellett (l. pl. WEBER II. k. 507. l.)

AZ ANYAG SZERKEZETE.

Az elektromosság legújabb elmélete az elektronelmélet, az anyag szerkezetére vonatkozó felfogásunkat lényegesen megváltoztatta. Mindaddig, amig a ritkított gázokban történő elektromos kisülés jelenségeit tüzetesebb vizsgálat tárgyává nem tették, a hidrogén-atomot tekintették a természetben előforduló legkisebb tömegmennyiségnek. A katód-sugaraknak vizsgálata azonban arra a meglepő eredményre vezetett, hogy e sugarakat alkotó parányi elektromos részecskéknek, az elektronoknak a tömege a hidrogén-atom tömegénél több mint ezerszer kisebb s minden gázban ugyanakkora. Az elektronok a kémiai atomoknak fontos alkotórészeit képezik.

A semleges állapotú kémiai atomok *bizonyos számú* elektront tartanak lekötve, melyek alkalmas körülmények között az atomtól elválhatnak. A rendesnél kevesebb elektront tartalmazó atom pozitív elektromosságú, míg a rendesnél több elektront tartalmazó atom s a szabad állapotban előforduló elektron negatív elektromosságot mutat. Valószínű most már, hogy a kémiai atomok is az elektronok bizonyos rendszeréből állanak s így az egész világegyetem elektronokból van felépitve.

Thomson J. J.[1] a kémiai atomok szerkezetére vonatkozólag nagyon szellemes elméletet állított fel. Szerinte az ősatom egy negatív elektronból s egy vele egyenlő elektromos töltésű pozitív gyűrűből állónak tekinthető. A pozitív gyűrű térfogata sokkal nagyobb. Az elektron a pozitív gyűrű közepén foglal helyet. Ezen ősatom anyagi tömegét az elektron alkotja.

---

[1] J. J. Thomson: Elektrizität und Materie.

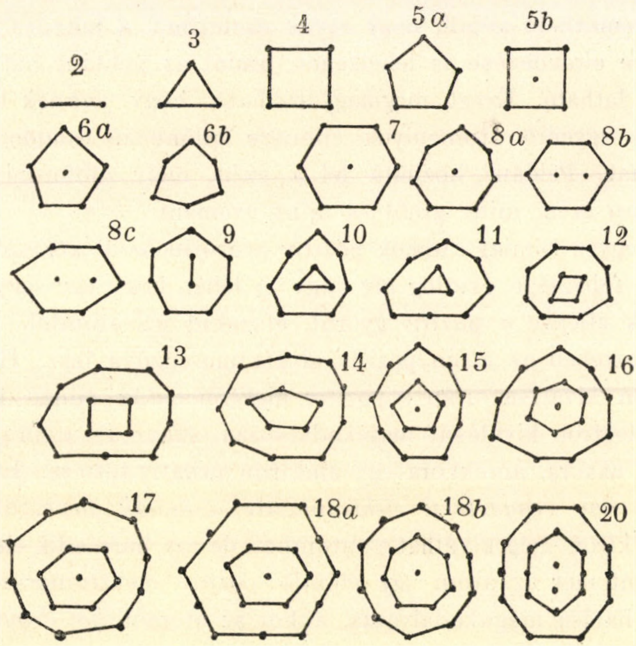
Mozgásuk közben az ősatomok egymás közelébe kerülvén, több elektronból álló rendszerekké egyesülnek. Így keletkeznek a különböző kémiai elemek atomjai, melyek ugyancsak egy pozitív gyűrűből s ezen gyűrűn belül az elektronoknak egy bizonyos *szimmetrikus elhelyezésű* rendszeréből állanak. Az *elektronok* a pozitív gyűrű középpontja körül keringenek s emiatt egy egész kis bolygórendszerhez hasonlíthatók. Ezen elektronok negatív töltéseinek összege egyenlő a pozitív gyűrű töltésével. A hidrogén-atom tömege körülbelől ezerszer nagyobb az elektron tömegénél s így a pozitív gyűrűn belül a hidrogénatom körülbelől ezer elektront tartalmaz. A többi eddig ismert elem atomjának pozitív gyűrűjén belül sokkal több elektronnak kell lenni, mert a hidrogén atomja az általunk ismert elemek atomjai között a legkisebb tömegű.

Az elektronoknak az atom pozitív gyűrűjén belül való elhelyezkedésére vonatkozólag Mayer kisérlete nyújt felvilágosítást. Mayer egyenlően mágnesezett acéltűket egyenlő súlyú parafadugókon átszúrva vízbe helyezett oly módon, hogy a negatív (déli) mágneses sarkok a víz felszíne alatt, a pozitív (északi) mágneses sarkok pedig a víz felszíne felett voltak. A vizen úszó kis mágneses acéltűkhöz egy mágnes déli sarkával közeledett. A mágnes déli sarka a tűk kiálló északi sarkára vonzó hatást gyakorolván, a tűk a mágnes alatt bizonyos *szimmetrikus rendben* helyezkedtek el. Az első ábra mutatja a mágneses acéltűk elhelyezkedését, amint azoknak száma 2-től 20-ig változott. A mágnesrúd vonzó hatása megfelel az atom pozitív gyűrűje által az elektronokra gyakorolt vonzó hatásnak, a mágneses acéltűk elhelyezkedése pedig az elektronok elhelyezkedésének.

Az elektronoknak az atomokban e mágneses acéltűkhöz hasonló elrendezésével meg lehet magyarázni az elemeknek Newlands és Mendelejeff által felállított periodusos rendszerét. Eszerint ha az elemeket növekedő atomsúlyaik szerint elrendezzük, akkor azt tapasztaljuk, hogy *bizonyos tulajdonságok* több közbeeső elem után szakaszosan újra meg újra előtűnnek.

Például a litium bizonyos tulajdonságai nem mutatkoznak a sorban közvetetlenül utána következő elemeknél, hanem csak nátriumnál; azután ismét több közbeeső elem után a káliumnál találjuk fel megint azokat.

E tulajdonságok az elektronok bizonyos rendszerétől függnek, amely a mágneses acéltük említett elrendezéséhez hasonló.



1. ábra.

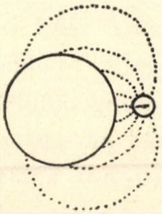
Vegyük például azokat a rendszereket, melyeknél az elemek tulajdonságai a háromszöges elrendezéssel függnek össze. Ilyen elrendezést találunk három mágnestű esetében. Négy mágnesnél már a háromszöges elrendezés eltűnik, de tiz mágnesnél megint előtűnik. Ezután húsz mágnesnél találkozunk ismét a háromszöges elrendezéssel, azután pedig harmincötnél. Az elektronoknak e mágnestűkhöz hasonló elrendezése igazolja azt, hogy az elemek tulajdonságai az atomsúlynak periodikus függvényei.

A mágnesek elrendezkedésében egyes helyeken ugrásszerű változást találunk. Tizennégy mágnes például még két csoportot alkot, tizenöt pedig már három gyűrűt képez; épígy huszonhat mágnes még három gyűrűt képez, huszonhét pedig már négyet. Hasonló ugrással találkozunk az elemek periodusos rendszerében is, mely különösen feltűnő a sorban egymásután következő hélium és litium, neon és nátrium, argon és kálium között. Megemlíthető végül, hogy egyes esetekben a mágnestűknek többféle elrendezése is lehetséges, amint az például hat mágnesnél látható. Ezzel megmagyarázható, hogy vannak testek, melyek egyenlő atomsúlyuk ellenére különböző tulajdonságot mutatnak. Például hozható fel a szén, mely előfordul mint alaktalan szén, mint grafit és mint gyémánt.

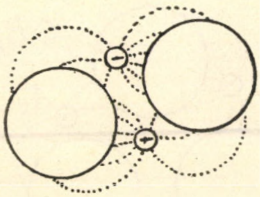
Az egyes kémiai atomok pozitív gyűrűjén belül keringő elektronok sebessége esetleg oly nagy is lehet, hogy egy vagy több küzülök átlépve a pozitív gyűrűt, elszakad az atomtól, minek következtében az atom pozitív elektromosságúvá lesz. Ha egy elektron kiválása után a pozitív elektromosság vonzó hatása több elektron kiválását megakadályozza, akkor az atom pozitív töltése akkora, amekkora egy elektron negatív töltése. *Az ilyen atomot egy vegyértékű elektropozitív atomnak nevezzük.* Ha két elektron még kiválhat az atomból, de egy harmadik elektron kiválását már az atom így előálló pozitív elektromosságának vonzó hatása megakadályozza, akkor az atomot *két vegyértékű elektropozítiv atomnak nevezzük.* Hasonlókép lehetnek *három vagy több vegyértékű elektropozítiv atomok* is. Lehetséges viszont az is, hogy egyes atomok pozitív gyűrűjén belül keringő elektronok sebessége oly kicsi, hogy az atom képes egy, két, vagy több elektront kívülről befogadni, miáltal az atom negatív elektromosságúvá lesz. Az ily atomokat a kivülről befogadott elektronok száma szerint *egy, két vagy több vegyértékű elektronegativ atomoknak nevezzük.*

Vannak végül oly atomok is, melyek elektront sem elveszteni, sem kívülről felvenni nem képesek. Ilyenek például az argon és hélium atomjai. Az ilyen elemek semmiféle vegyületben elő nem fordulnak, azért azt mondjuk róluk, hogy kémiailag teljesen *semlegesek.*

Az atomtól elválasztható elektronokat STARK J.[1] valencia-elektronoknak nevezte el, mert ezeknek számától függ az atom vegyértéke (valenciája). Ezen elektronok elektromos erővonalak által vannak az atom pozitív gyűrűjéhez kötve. Az elektromos erővonalakat FARADAY tényleg létezőknek tartotta, vagyis az éternek az elektromos részecskék körül rostos szerkezetet tulajdonított. Az éternek ezen rugalmas elváltozása okozza az elektromos vonzást és taszitást. Ha a valencia elektron csak egy atom pozitív gyűrűjéhez van kötve erővonalak által, akkor telítetlen, ha pedig két atomot köt össze erővonalakkal, akkor telített.



2. ábra.



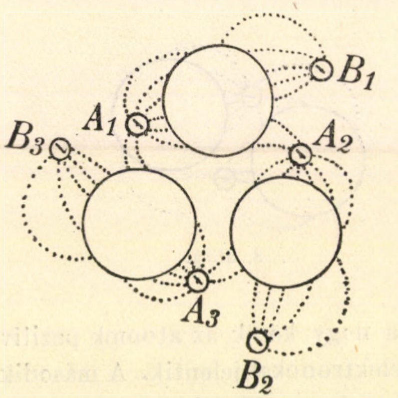
3. ábra.

A második és harmadik ábrán a nagy körök az atomok pozitív gyűrűjét, a kis körök pedig az elektronokat jelentik. A második ábrán levő elektron telítetlen, a harmadik ábrán levő kettő pedig telitett. Az egyes elemek kémiai egyesülésekor ezen erővonalak megrövidülnek. Ez az oka a vegyüléskor létrejövő térfogatkisebbedésnek. A nem telitett valencia-elektronok idegen valencia-elektron taszító hatása következtében atomjuktól kissé eltávolodhatnak. Az ily meglazult valencia-elektronok az atomtól vagy molekulától könnyen elszakadhatnak. A negyedik ábra három atomnak olyan vegyületét mutatja, mely három telitett valencia-elektronon $(A_1\ A_2\ A_3)$ kívül három meglazult valencia-

[1] J. STARK: Die Walenzlehre auf atomistisch-elektrischer Basis. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. 1908. Seite 124.

elektront (B_1 B_2 B_3) is tartalmaz. A meglazult valencia-elektron elszakadása nem okoz kémiai felbomlást. Ez leginkább a fémeknél fordul elő, miért is a disszociációnak ezt a faját *fémes disszociációnak* nevezik. Az így szabaddá vált elektronok számától függ a fémek elektromos vezető képessége. A disszociációnak másik faja az *elektrolitikus disszociáció*, melynél a telitett valencia-elektronok az egyik atomtól vagy gyöktől elszakadnak és a másik atom vagy gyök által köttetnek le. Az így keletkezett pozitív és negatív iónok szétválása kémiai felbomlást létesít.

Tegyük fel, hogy egy térben két elemnek atomjai egyenlő számban fordulnak elő s az egyik elem egy vegyértékű elektropozitív, például hidrogén, a másik pedig egy vegyértékű elektronegatív, például klór. Akkor a hidrogénatomok mindegyike lead egy-egy elektront, mely elektronok azután a klóratomokba vándorolnak. Emiatt a hidrogénatomok mindegyike egységnyi pozitív, a klóratomok mindegyike pedig egységnyi negatív elektromos töltéshez jut. Megjegyzendő, hogy most az elektron töltését tekintjük egységnyi töltésnek. Az ellentett elektromos töltésű atomok egymást vonzani fogják s előáll a HCl-vegyület, vagyis a sósavgáz. Ha klór helyett oxigént vezetünk a térbe, akkor az oxigén minden atomja a hidrogén két atomját fogja lekötni, mert az oxigénatomok két-két elektront véve fel kívülről, kétszer akkora negatív töltéshez jutnak, mint amekkora az egyes hidrogénatomok pozitiv töltése egy-egy elektron elvesztése után. A két vegyértékű oxigén tehát az egy vegyértékű hidrogénnel H_2O vegyületet alkotja, vagyis a vizet. A vegyület tényleges előállásához természetesen bizonyos meghatározott hőmérsékletre van



4. ábra.

szükség. *A vegyi rokonságnak az oka tehát az ellenkező töltésű atomoknak (iónoknak) kölcsönös vonzása.*

Kérdés most már, hogy hogyan keletkeznek az elemek molekulái? A hidrogén molekulája két atomból áll, melyek mindegyike teljesen egyforma. Ezen atomoknak molekulákká való egyesülését az atomoknak különböző sebességével magyarázhatjuk meg és pedig a következő módon: A nagy sebességgel mozgó atomok mindegyike heves összeütközésük által egy-egy elektront elveszít. Ezen elszakadt elektronokat a lassabban mozgó atomok kötik le. Az elektronjától megfosztott pozitív atom egy szabad elektron lekötése által negatívvá vált atommal molekulává egyesül. Erősen elektropozitív gázoknál ez nem fordulhat elő, mert az ily gázok atomjai szabad elektronokat lekötni nem képesek. Ezen gázok atomjai tehát molekulákká nem egyesülhetnek.

A molekulák összetartását az eddigi tárgyalásaink alapján *elektromos erőknek* tulajdonítjuk. Az elektromosságok minden egyes molekula felületén megfelelő elektromos mezőt létesítenek. Emiatt a molekulák úgy iparkodnak elhelyezkedni, hogy egy-egy molekula felületének pozitív része a szomszédos molekula felületének negatív részével kerüljön szembe. Ha ezen irányító erők a termikus rendezetlen mozgást legyőzik, akkor a molekulák szabályosan rendezkednek el s a test kristályalakot ölt. Az izzó szilárd és folyékony testek folytonos színképét a valencia-elektronok rezgése létesíti. Ellenben az izzó gőzök és gázok jellemző színes csíkjait az atom pozitív gyűrűjén belül keringő elektronok létesítik, melyek csak az atom felbomlásakor válhatnak szabaddá.

Az egész anyagi világnak az építőkövei tehát az elektronok. Az anyag megmaradásának a törvénye a jelenlegi természettudományi világfelfogás szerint tulajdonképpen az elektronok megmaradásának a törvénye, mely szerint a világegyetemben az elektronok száma állandó.

Nyáry Béla.

H. O. WIENER SZÍNHASONÚLÁSI ELMÉLETE.

A közvetlen testszínfotografozás tudományos alapjait SEEBECK, POITEVIN, BECQUEREL stb. munkáinak alapján, mint ismeretes, WIENER[1] vetette meg. Az elmélettel, különösen annak gyakorlati értékesítésével eddigelé igen kevesen, sőt alig-alig foglalkoztak. Mivel általánosan elismert tény, hogy WIENER teóriájával a testszínfotografozás legideálisabb megoldásához vezető utat jelölte meg, érdemesnek találtam a szakirodalomban e tárgyra vonatkozó, feldolgozatlan,[2] elszórtan és nagyon is gyéren található adatokat összegyüjtögetni, a hol csak módomban állott az eddigi vizsgálatok értékéről kisérletekben, vagy az említendő kutatók laboratóriumából kikerült munkálatokon személyes tapasztalattal meggyőződni s ezek és eredeti forrástanulmányok alapján a WIENER-féle ú. n. színhasonúlási vagy szinalkalmazkodási elmélet és a gyakorlati megvalósítás fejlődésének történetét a következőkben teljes hűséggel összeállítani. Természetes, hogy az elmélettel szoros összefüggésben álló érzékenyitők rövid tárgyalását sem mellőzhetem.

*

A testszínfotografozás principzipumainak történetéből fel kell említenünk, hogy a fénynek a test színeire gyakorolt hatását legelőször CHRISTIAN SAMUEL WEISS[3] figyelte meg 1801-ben.

---

1 Wied. Ann. 55—1895, p. 121.

2 Tudtommal csak FR. LIMMER foglalkozott a hasonúlási eljárás fontosabb irodalmának összeállításával s ő is kizárólag EDER «Handbuch d. Phot. etc.» munkájából czitált idézetekkel. L. Phot. Corr. 1909, p. 104 és Phot. Rundschau 1909, p. 81.

3 WOREL: Eders Jahrb. f. Phot. 23, 1909, p. 3. WEISS szül. 1780. Leipzigben, megh. 1856. Égerben. Munkája: «Betrachtung eines merkwürdigen Gesetzes der Farbenänderung» etc.

Szerinte a fény «több egymástól fajlagosan különböző alapanyagokból» áll s valamely szines test mindenkor azt a fényfajt veri vissza, «melynek alapanyagával nincs kémiai rokonsága». Így a vörös test csakis a vörösfény anyagát ereszti át és veri vissza, «mert ezzel kémiailag nem rokon, ellenben a többi, vele rokon fémanyagokat beszívja» (elnyeli). WEISS után A. VOGEL [1] tanulmányozta — Párisban, 1812-ben — a különböző színű fénysugaraknak nehány organikus eredetű festékanyagra gyakorolt hatását s megállapította, hogy a festékanyagok némelyike «az oldatával ellenkező» [2] (ahhoz komplementer) színű sugarak hatása alatt igen gyorsan, megegyező színű fénysugarak hatása alatt pedig nagyon lassan színét veszti, «elhalványúl, kifehéredik»; vannak azonban állandó színű festékanyagok is, melyek fény behatására színüket nem változtatják; ilyen fényben állandó, tartós színű (lichtecht) festékanyag VOGEL szerint pl. az ú. n. «nitrözgáz», azaz a salétromsavas foszforoldat. DÖBEREINER [3] 1813-ban hasonló megfigyeléseket tett, a mikor kimutatta, hogy nehány anyag [4] színes fény behatása alatt igen gyorsan változtatja és elveszti színét. Fontosabbak THEODOR GROTTHUS [5] fejtegetései, a ki a kurlandi Természettudományi Társaság 1818 november 16-án tartott gyűlésén «A fény és elektromosság kémiai hatásáról» cz. a. tartott értekezésében felállítja a WIENER-féle elméletben is alapvető tételt, mely szerint: «A színes fény a hatásának kitett színes test azon színeit igyekszik megsemmisíteni, melyek saját színeivel ellentétesek, a vele egyező színeket ellenben megtartani törekszik». [6]

---

[1] SCHWEIGERS Journ. f. Chem. u. Phys. 1813—9, p. 229.

[2] HÜBL után «spektrálisan ellenszínű festékek». L. Die Dreifarbenphot. Halle, 1897, p. 95.

[3] Dr. J. M. EDER: Handbuch d. Phot. Gesch. etc. 3. Aufl. Halle, 1905, p. 124.

[4] Különösen a JAVALLE-féle lúgok.

[5] L. EDERS Jahrb. i. h. Igazi és teljes nevén: Christian Johann Dietrich Freiherr von Grotthus.

[6] «Ha eltekintünk a test kémiai természetétől — mondja GROTTHUS — azon test reagál legintenzívebben bizonyos színű fényre, a mely test ter-

Ezeket a régebbi tapasztalatokat az újabb pontos spektroszkópikus vizsgálatok majdnem mindenben megerősítették. A festékek színképéből egyszerűen megállapítható, hogy nincs oly ideális festékanyag, mely csakis egyetlen meghatározott hullámhosszúságú sugarat nyelne el, hanem mindenkor egy egész spektrális zónát, másfelől az elnyelési szalagnak a színtónust meghatározó helyzetéből és a színárnyalatot jellemző alkatából beigazolódott, hogy a keskeny elnyelési szalagú, világos, tüzes, a spektrumszínekhez hasonló kinézésű állati és növényi festékanyagok,[1] valamint a széles, de kevésbé erős elnyelési szalagú, homályosan árnyalt, feketés benyomású ásványi festékanyagok a színes fény behatásával szemben ellentétes magatartást tanusítanak: az ásványi festékanyagok tartós színűek míg a keskeny elnyelési szalagú anilinfestékek a fény behatása alatt könnyen elhalványodnak.[2] A festékek fizikai tulajdonságainak vizsgálatából az is kitűnt, hogy — bár az elmélet, bármely a spektrumban egymástól egyenlő távolságban fekvő három színt alkalmasnak itél arra, hogy azokból szubtraktiv színkeveréssel az összes színtónusokat elő tudjuk állítani — az eddig ismert és tanulmányozott festékanyagok között nincsen oly zöld és vörös festék, melyekből az elmélet követelésének megfelelő tiszta sárgát lehetne keverni. Ezért a szubtraktiv színkeltés alapszínei: a sárga, valamint az attól egyenlő távol-

mészetes állapotában ezzel a színes fénynyel épen ellentétes színt mutat. Hogy pedig a fehér ezüstnitrát kémiailag a legerősebben megváltozik a színkép legsötétebb részeiben, onnan van, mert a kék, ibolya és ibolyántúli zóna annak világos színével leginkább ellentétes lévén, e sugaraknak az ezüstnitrátba való behatolásuknál a legnagyobb ellentállást kell legyőzniök s ezért elnyeletnek.»

[1] A kétértelműség elkerülésére megjegyzem, hogy festékanyag, továbbá festék vagy pigment alatt mindenkor oly színes testeket értek, melyek oldott vagy poralakú állapotukban bizonyos határozott hullámhosszúságú fénysugarakra nézve különösen nagy elnyelési képességet mutatnak s még igen híg oldataikban is jellemző színök van.

[2] A festékeknek ezt az érdekes magatartását legtalálóbban megvilágítja Hübl báró hasonlata: «Az ékalakú kalapács ütése jobban rombol, mint a széles talpú kalapácsé.» (I. m. p. 38.)

ságokban fekvő — meghatározott hullámhosszúságú — kék és vörös.[1]

A festékanyagok fizikai tulajdonságaira, valamint a kivonó színkeverés törvényeire[2] támaszkodva, R. Ed. Liesegang[3] a színes képek keltésének egyszerű elméletét vázolta a következőkben: Válaszszunk a szubtraktiv színkeltés alapszíneiül oly szenszibilizált festékanyagokat, melyek épen fényérzékenységük miatt — a fényt nagymértékben elnyelvén — nem tartós színűek, azaz könnyen elhalványodnak.[4] Kenjük fel e három összekevert pl. anilinfestéket fehér papirosra. A fekete keverékkel bevont fényérzékeny papirost valamely színes üvegképpel befödve, tegyük ki a napfény hatásának, akkor a papiroson a színes üvegkép hű másolatának kell előállania. Pl. a réteg azon helyén, a melyre a fedő üvegkép megfelelő színű helyén át vörös fénysugarak hatnak, az ott lévő sárga, kék és vörös festékporrészecskék közül csakis ez utóbbiak maradnak változatlanul, mivel a vörös színű test a vörös fénysugarat átbocsátja, illetőleg a fehér alap reflektálja, míg a vörös fénysugarakat elnyelő sárga és kék színű festékrészecskék elhalványúlnak, kifehérednek: a réteg illető helye tehát az épségben maradt vörös festékrészecskék vörös színét mutatja. Ugyanígy nyerjük a rétegen a másik két alapszínnek megfelelő színeket. A réteg azon helyén, melyre az üvegképből kevert pl. zöld sugarak jutnak, szintén zöld szín fog előállani, mert e sugarakat a sárga és kék festékrészecskék akadály nélkül átbocsátják, a vörös festékrészecskék ellenben elnyelik azokat. Így ez utóbbiak elhalványodnak, a változat-

---

[1] Közelítőleg ilyen pigmentek a krómsárga, a krapplak és a párisi kék.

[2] A szubtr. és additiv színkeverésről l. Batta J. Bevezetés «Az állófényhullámok»-hoz. Békés, Ref. főgimn. 1910—11. Ért., p. 7—14.

[3] Phot. Archiv 1899, p. 328 és Phot. Almanach 1891, p. 22.

[4] Annak a jelenségnek, hogy nem állandó színű festékanyagok csak azon sugarak által halványíttatnak el, melyeket abszorbeálnak, fotokémiai elvét tisztán, először J. F. W. Herschel (sz. 1792., megh. 1871.) ismerte fel, a spektrumnak növényi festékanyagokra gyakorolt hatásának 1842-iki kísérleti tanulmányozása alapján. L. König: Farbenphot., p. 4, Eders Gesch., p. 441 és 209.

lanul maradt sárga és kék festékporrészecskék keveréke pedig zöldet ád. A kép fekete helyei alatt nem jutván fény a réteghez, az is megtartja eredeti fekete színét. A kép fehér részei alatt pedig, mivel a rétegre eső fehér fényből mindháromfajta festékrészecske elnyeli a reáeső s az elnyelési szalaggal meghatározott részt s mivel az alapfestékek elnyelési szalagjainak egymás mellett az egész spektrumot át kell fogniok, mindegyik részecske elhalványodik, a réteg az illető helyen színtelenül, fehéren jelenik meg stb. Mivel a három alapszínt képviselő szenszibilizált festékek keveréséből előállított fényérzékeny réteg úgy veszi fel a reáeső fénysugarak színét, hogy a fény behatása alatt egy (alapszín), két (keverékszín), vagy mind a három (fehér) komponens festékanyag kifehérűl, elhalványúl, azért az eljárást kifehéredési vagy elhalványúlási (Ausbleichung) eljárásnak nevezték el. Hangsúlyoznunk kell itt a tudomány történetíróival szemben, — a kik Liesegang fejtegetéseit többnyire fel sem említik — hogy ő már Wiener kisérletei előtt négy évvel vázolta ez elmélet körvonalait, sőt, a mit általában és szintén érthetetlenül elhallgatnak, H. W. Vogel már a gyakorlati eljárás útjának irányát is kijelölte még 1892-ben.[1] A tudomány művelőivel szemben is ki kell emelnünk, hogy ezen eljárás és a Wiener-féle hasonúlási vagy színalkalmazkodó elmélet között — daczára annak, hogy ez utóbbira is helytelenül ugyanazt a nevet alkalmazzák[2] — a részletekben lényeges különbségek vannak.

Wiener[3] testszínfotografozó elméletét és a gyakorlati eljárás lehetőségét «A testszínekkel való fotografozás képzelhető alapja» cz. tanulmányában[4] 1895-ben építette ki. Vegyük fel, — mondja ő — hogy van egy oly ideális, csak kémiai (és nem termikus) fényabszorpcziót mutató anyagunk, mely mindazon színes sugarakra nézve fényérzékeny, a melyeket elnyel és

---

[1] L. Wied. Ann. 46—1892, p. 521.

[2] Eders Jahrbuch f. Phot. 19—1905, p. 7.

[3] Szül. 1862 jún. 15. Karlsruheban, 1895-ben a giesseni, 1899 óta a lipcsei egyetem fizika-tanára. L. Poggendorf Biogr. etc.

[4] Wied. Ann. 55.—1895, p. 257.

pedig mindenfajta színes sugárra nézve ugyanazon mértékben, azaz arányos elnyeléssel fényérzékeny. Az is elképzelhető, hogy ez a színfogékony anyag a ráeső fény szétbontó hatása következtében arányos, vagyis egyenletes elnyelésű, elnyelt fényben egyidejűleg kifehéredő oly egyszínű testecskékre bomlik fel, melyek csak a saját színükkel megegyező fényfajt reflektálják, a többieket azonban annyival nagyobb mértékben elnyelik, mennél inkább eltérnek azok a szétbontási anyag színétől. Legyen az eredeti fényérzékeny anyag fekete, egyszerűség kedvéért a belőle származó egyszínű fényérzékeny szétbontási anyagok képviseljék épen a szubtraktiv színkeltés választott alapszíneit; hogy egy ilyen ideális színfogékony anyag a megvilágító színeket tényleg teljes hűséggel adná vissza, kiviláglik a következő okoskodásból: Először is egyezzék a megvilágító szín valamelyik alapszínnel. Mivel a fekete anyagkeverék arányos elnyelésű. a test kémiailag felbomlik s előállanak a szintén arányos elnyelésű egyszerű színű fényérzékeny testecskék. Ezek közül azok, melyeknek színe a megvilágító fénysugarak színével nem egyezik, az alapszínt elnyelik, mert a feltevés szerint, minden saját színüktől különböző színű fénysugarat abszorbálniok kell. Arányos elnyelésű fényérzékenységük miatt ezek a kis testecskék egyidejűleg kihalványodnak, felbontatnak — most már színtelen fehér anyagokra — kivéve a megvilágító színnel egyező színű anyagot, a mi a reáeső fényt nem nyeli el. Állandóan tehát csakis ez a szín marad meg s a keletkezett fehéres anyagon a megvilágító alapszín jelenik meg. Ha a megvilágító szín, mint a legtöbb természeti tárgy színe, keverékszín, pl. zöld, akkor a színfogékony rétegben a zöldet legjobban reflektáló, azaz legkevésbé elnyelő sárga és kék testecskék változatlanul maradnak, a többiek kifehéríttetnek. Az eredmény tehát fehér alapon sárga és kék testecskék keveréke, azaz zöld szín lesz. A fehér megvilágítás — a benne foglalt végtelen sok színfaj miatt, az összes színes anyagokat egyenletesen és egyidejűleg fehéríti ki, a réteg fehér lesz. Ha a réteg nincs megvilágítva, akkor az anyag is fekete marad. Megfelelő megvilágítási idő és fényerősség mellett tehát minden szín ugyanazon idő alatt hűen jelenik meg, a réteg alkalmazkodik, hasonúl a besugárzó fény színéhez, innen az elmélet neve.

WIENER hasonúlási elméletét, legelső sorban a régebbi megfigyelések, különösen SEEBECK, BECQUEREL és POITEVIN adatainak kisérleti vizsgálatára alapította. ZENKER[1] magyarázata szerint a SEEBECK, BECQUFREL és POITEVIN lemezeken a színek előállásának közös oka, hogy az érzékeny réteg belsejében keletkezett és ható állófényhullámok miatt olyan — rendkívül vékony tagokból álló — lemezrendszer áll elő, mely a megvilágító színekkel identikus színeket mutat, a nélkül, hogy az érzékeny réteg bármi részében is tényleg színes lenne. SCHULTZ-SELLAK[2] rámutatott, hogy «porban és papiroson» (tehát SEEBECKnél és POITEVINnél) «nem jöhetnek létre ily szabályos állóhullámok», mindhárom kutató képeit azonban tévesen ő is azonos eredetűeknek itélte s a képeken «a véletlenül identikus színhatás» magyarázatára egy érdekes elméletet állított fel. Szerinte[3] a hetvenes évekig ismeretes összes eljárásoknál a fényérzékeny réteg ú. n. mechanikai szétbontása a színek előállásának oka. Bróm, jód vagy klórezüstkristályokat — a redukczió meggátlására — szabad bróm, jód, illetőleg klórfölösleg hozzáadásával üvegcsőbe zárva s a fény hatásának kitéve ugyanis azt tapasztalta, hogy a testek a fény behatása alatt mechanikailag változtak meg, t. i. a jódezüstkristályok porrá estek szét, a bróm és klórezüstkristályok hasonló változást szenvedve, elvesztették fényüket, homályosakká lettek. Ennek a mechanikai változásnak a szerepét a közönséges fotografiában azért nem vehetjük észre, mert «ámbár a kémiai változás mellett az ezüsthaloidok fotografikusan érzékeny állapotában az is végbemegy, de oly rendkívül csekély mértékben, hogy a kémiai hatás mellett nem tesz számot». Ha — pl. — jódezüstkristályt a napfény

[1] Lehrbuch d. Photochromie. Berlin, 1868.
[2] Pogg. Ann. 143—1871, p. 161.
[3] I. h., p. 439 és 449.

hatásának hosszabb ideig teszszük ki, akkor azt tapasztaljuk hogy először sárgásszürke színű, majd homályos sötétbarna szint vesz fel, azután rendre vörös, zöld és kék lesz, — ez állapotában átlátszóbb — végül fehéresen jelenik meg világoskék színezettel. E színek SCHULTZ-SELLAK szerint hajlítási színek és a jódezüstnek a fény behatása által előidézett finom elporlódása miatt, t. i. a jódezüstrészecskéken és a közvetlenül e mellett haladó fénysugarak interferencziájából állván elő, az elporlódás foka szerint, csakis a ható fény intenzitásától függhetnek, de a ható fénysugár hullámhosszúságától függetlenek s így a besugárzó fénynek megfelelő színhatás keltése «teljesen a véletlen műve». Mivel a réteg mechanikai szétbontása útján előálló színek a lemez anyagának eloszlása szerint változó hajlítású színek, azért SCHULTZ-SELLAK elmélete értelmében WIENER [1] e színeket eloszlási vagy elosztódási színeknek (Zertheilungsfarbe) nevezte el s az elméletet a következő okoskodással [2] döntötte meg: SCHULTZ-SELLAK teóriájának következménye, hogy a fényérzékeny rétegen előálló színek minősége nem a ható sugarak hullámhosszúságától, hanem a rezgés amplitudójától, a behatás erősségétől függ; különböző színű, egyenlő intenzitású fénysugarak tehát mindenkor ugyanazt a színt idézik elő.[3] Ha helyes ez állítás, akkor egyenlő erősségű, különböző színű fénysugaraknak kezdetben egyenlő színeket kell előidézni, a behatás idejének növekedtével pedig a ható fénysugarak erőssége által meghatározott színeknek ugyanabban a sorrendben kell megjelenniök. WIENER jódezüstrétegére úgy vetette egymás mellé a spektrum különböző színű mezőit, hogy mentől kisebb valamelyik zónának — előző mérésekből ismert — in-

[1] L. TONNÁL: ZENKER L. d. Ph., 2. Aufl. Braunschweig, 1900, p. 139.

[2] Wied. Ann. 55—1895, p. 239—244.

[3] Érdemes itt — de mivel az adatok sem pontosak s az eljárás fizikai elve sem tiszta — épen csak felemlíteni L. DELVALESnek ezelőtt 14 évvel a párisi tudományos akadémia elé terjesztett elektrolytikus színfotografozó eljárását, melyben az egyenlő intenzitású különböző színek állítólag azonos színeket keltenek. (Bull. Soc. Franc. 1898, p. 451. Phot. Wochenbl. 1898, p. 364 és EDERS Jahrb. 1898—12, p. 541.)

tenzitása, annál — arányosan — több ideig engedte azt a fényérzékeny rétegre hatni. Így a különböző színek hatás erőssége egyenlő lévén, az elmélet szerint, a spektrum minden ható mezeje alatt, a fényérzékeny rétegen ugyanazon színnek kellett volna előállania. A döntő kisérlet eredménye: Először is a különböző megvilágító színek kezdeti hatása nem egyenlő, hanem különböző színeket keltett és pedig olyanokat, a melyek a megvilágító színekkel közel egyenlők, azokhoz legalább is mindenkor hasonlók voltak, másodszor pedig a színek változási sorrendje is ellentmond SCHULTZ-SELLAK elméletének. Húsz lemezen ugyanis pontosan megfigyelték[1] a színek változását s a spektrum hatásának kitett fényérzékeny rétegen legelőször mindig a vörös szín jelentkezett. Ez képviselte tehát a szétbontási vagy elosztódási színek alapfokát, azaz más színnek nem szabad lett volna előállania a nélkül, hogy a legalsó fokon át ne haladjon, másfelől pedig e kezdeti színnek, a behatás idejének növekedtével «magasabb fokú szétbontási színbe» kellett volna átalakúlnia. Épen az ellenkező jelenség következett be: «más megvilágító színek alatt, a megfelelő színek, minden átmenet nélkül állottak elő és a vörös szín a behatás idejével nemcsak hogy nem változott, hanem még erősebbé lett». Hogy a SEEBECK és POITEVIN lemezeinek színei — ellentétben BECQUEREL látszati színeivel — sem az állófényhullámok lemezrendszere által előidézett, sem SCHULTZ-SELLAK-féle hajlítási, «elosztódási» látszólagos színek, hanem valóságos testszínek, e kérdést WIENER ismert, híres prizmakisérleteivel végérvényesen eldöntötte.

A színalkalmazkodási elmélet felépitéséhez fontos adalékokat szolgáltattak az amerikai CAREY LEA-nak és HERMANN KRONE-nek, a drezdai műegyetem tanárának a fényérzékeny réteg kémiai viszonyaira vonatkozó kutatásai. CAREY LEA,[2] a ki több

---

[1] WIENER maga nem bízott teljesen szemének elég jó színérzékében, azért a megfigyelést egyik tanártársával, GOTRIANnal együtt eszközölte.

[2] L. H. KRONE: Darst. d. nat. Farb. etc. WEIMAR 1894 p. 45. DONATH Grundl. d. Farbenphot. p. 59.

mint három éven át (1885—1889) behatóan tanulmányozta a fénynek az érzékeny ezüstvegyületekre gyakorolt hatását, kimutatta, hogy a fény e vegyületeket olyan magukban is fényérzékeny szubvegyületekké redukálja, melyek az eredeti vegyület szabad részével összekötődve, külömböző szinű vegyületekké, fizikailag szilárd oldatokká alakúlnak.[1] Ezeket a fekete, bibor, baraczkvirágvörös, sötétebb rózsaszín stb. színű vegyületeket Carey Lea, az érzékeny réteg összetétele szerint fotokloridoknak, fotojodidoknak, illetőleg fotobromidoknak nevezte el. E kis fototestek létezését, valamint a létrejövetelöket illető kémiai magyarázat helyes voltát kétségkívül és közvetlenül bebizonyította akkor, a midőn azokat fényhatása nélkül, elsötétített laboratoriumában tisztán kémiai uton is előállitotta, sőt az így nyert vörösszínű fotoklorid fényérzékenységét külön is tanulmányozta.[2] Mig Carey Lea kisérleteiben Seebeck módszere szerint præparált papiros fényérzékeny rétegét vizsgálta, addig Krone[3] a Poitevin-féle lemez érzékeny rétegének kémiai tulajdonságait kutatta s sikerült kimutatnia, hogy Poitevin lemezein is a Carey Lea-éhoz hasonló szines fototestecskék állanak elő.

Krone,[4] Sellmeier és Helmholtz fényelnyelési elméletére sokban emlékeztető, kémiai rezonanciában látja az identikus szinek fellépésének okát, a midőn felteszi, hogy «valamely fénysugárral megvilágitott fényérzékeny réteg molekulái, az éterrészecskék rezgő mozgását átvéve, ugyanolyan hullámhosszakkal rezegnek tovább, mint az őket besugárzó fény».[5] Kroné-nek ezt a feltevését elvetették, úgy okoskodván, hogyha

[1] Gunz 1891-ben teljes bizonyossággal kimutatta, hogy a klórezüst a napfény hatása alatt részben ezüstklorürré lesz, klór válik szabaddá s a fizikailag szilárd oldat ezüstklorid és több-kevesebb ezüstklorür vegyülete. C. R. 1891. 112 p. 861.

[2] Phot. Mitth. 24 k. p. 110, 128, 142, 169, 180, 208 és 219.

[3] Deutsch. Phot. Zeit. 1891 p. 327. Krone i. m. p. 43.

[4] Szül. 1827 szept. 14. 1870 óta a drezdai technika tanára.

[5] I. m. p. 49.

ez elmélet helyes volna, akkor a rezgő molekuláknak a szomszédságukban lévő éterrészecskéket is hasonló rezgőmozgásra kényszerítve — önvilágitókká kellene lenniök, illetőleg mivel a rezgést előidéző fénysugarak elnyelettek, a réteget az ezekhez tartozó kiegészitő színben kellene látnunk. Ezt az ellenvetést tovább fűzhetjük még azzal, hogy a molekulákat, bizonyos — a kémiai rezonanczia fellépésének feltételei által megszabott — mozgásra kényszerítve, e molekulamozgás által meghatározott éterrezgések előidézése útján, a napfény behatása nélkül is, tudnánk előállitani szines képeket. A réteg önvilágitóválételére nincs kisérleti adatunk. Van azonban arra — a mi úgy látszik KRONÉ-nek, sőt magának WIENER-nek a figyelmét is elkerülte — hogy a réteget tényleg a bevilágitó színekhez kiegészitő színben látjuk. HERSCHEL [1] ugyanis azt tapasztalta, hogy jódezüstréteggel bevont érzékeny papiroson nem a spektrum megfelelő, hanem annak kiegészitő színei jelentek meg. E. HRUDNIK,[2] LASSAIGNAC 1839-iki eljárásához visszatérve ugyancsak jódsóval bekent s a napfény hatásának kitett klórezüstpapiroson állított elő nem fixálható, igen gyenge, de komplementar színhatású diapozitiv másolatokat. A KRONE-féle elmélet értékelése s annak harmadik, állitólagosan helytelen következménye szempontjából megismételtem M. de SAINT FLORENT [3] egy újabb kisérletét: Körülbelül két perczig a napfény hatásának kitett és sötétbarna szinűvé lett celloidin papirost — 100 cm^3 alkohol, 7 cm^3 glycerin, egyszázalékos jódtinktura és hat csep ammoniak keverékéből álló «színérzékenyítő» fürdőbe áztattam s a lemezt sötétben megszárítva, színes diapozitivvel — kék, sárga, vörös és zöldre festett üveglappal — leborítva három óra hosszáig izzó vaskályha közelébe helyeztem. Egy alkalommal bár rendkivül gyengén, de így is sikerült

---

[1] COSMOS 15. p. 127. L. BATTA J.: ÓNODI VERESS FERENCZ a szinfot. ört. Békés 1911. p. 6.

[2] Phot. Corr. 1903. p. 36.

[3] Phot. Rundschau 1896. p. 306.

előhivnom a szines képet s M. de Saint Florent egyedül álló érdekes tapasztalatát, hogy a kép pusztán hőhatása alatt tűz közelében is megjelenik, lényegében sikerült beigazolnom. Igaz ugyan, hogy a szines másolatok — tapasztalat szerint — direkt napfényben már egy óra alatt aránytalanul intenzivebben állanak elő, sőt (6—10%-os) nátriumthiosulfat, illetőleg ammoniak, vagy még inkább oxálsavas oldattal[1] annyira, amennyire fixálhatók is, míg itt az ilynemű kisérletek teljesen eredménytelenek maradtak, ez azonban nem dönti meg azt a tényt, hogy a képek keletkezésének közös oka van és az nem interferencziajelenség, a mint M. de Saint Florent állítja, hanem kémiai változás útján létrehozott testszínképződés, a mint Neuhauss is igazolja.[2]

«Lehetséges — mondja Wiener — hogy valamely fényérzékeny anyagnak csak részben vannak meg azok a tulajdonságai, melyeket az ideális színfogékony testtől megkívánunk, természetes, hogy az ilyen anyag csakis részben vagyis tökéletlenül adja vissza a szineket.» Seebeck, Poitevin képrétegeinek vizsgálatából kitűnik, hogy azok ilyen «részben színfogékony anyagok», mert: először a fényérzékeny anyag nem fekete, hanem Seebeck-nél sötétibolya, Poitevin-nél sötétszürkésibolyától szürkésbarnáig változik, e miatt a feketét nem képesek visszaadni s annak helyébe csupán sötét tónusok lépnek, másodszor Carey Lea és Krone kimutatták, hogy a Seebeck és Poitevin képeken fellépő fototestecskék nem egyszínűek, azért a reájuk eső egyszerüszínű sugarakat reflektálják ugyan, de a színtónusban helytelenül adják vissza, végül a szinek külömböző előállási idejéből, a természeti tárgyak kevert színeinek helytelen visszaadását is megmagyarázhatjuk Wiener kisérleteivel, melyekben a Seebeck—Poitevin-féle rétegekre egymást

[1] Hogy az oxálsav tulajdonképen a festékanyag fényérzékenységét emeli, azt Ellis 1898-ki észleletei is megerősitik. L. Eders Jahrb. f. Phot. 13. 1899. p. 469.

[2] Eders Jahrb. f. Phot. 11. 1897. p. 423. és 426.

keresztező spektrumok képét[1] vetíti.[2] Így a WIENER fellépéséig ismert testszínfotografozó eljárások (VERESS, SIMPSON, KOPP stb.) teljesen hű szint és képeket nem adhattak.

SEMPER, EIMER, POULTON, BARBER[3] stb. megfigyeléseiből valószínűnek tetszik, hogy némely állat — különösen a hernyók s azok között a papilio nireus — bőrének mechanikus színalkalmazkodása abban leli magyarázatát, hogy ez állatok bőre oly anyagokat tartalmaz, melyekből a fény behatása alatt új színes vegyületek állanak elő s ezek a WIENER-féle hasonúlási elmélettel kijelölt módon szinfotografozó anyagként szerepelnek. Ha a természet ez útmutatása szerint — tudnánk találni egy a WIENER-féle elméletet kielégítő ideális szinfogékony anyagot, a képek sokszorozása és fixálása már nem okozna nehézséget. A sokszorositáshoz — mint a közönséges fotografozásból ismeretes — a kapott színes képeknek átlátszóknak kellene lenniök, a mint azokat ÓNODI VERESS FERENCZ[4] több kisérletében előállította. A fixálást illetőleg külömböző módok gondolhatók — pld. az előálló színes testecskéket kémiai szétbontás útján fényérzéketlenekké tesszük, vagy azokat — valamely alkalmas anyag hozzáadása által — a szétbontástól megvédjük. Ez utóbbi útról WITT máris kimutatta, hogy rostanyagokra kent nem tartós színű festékek azáltal tétetnek állandó színűekké, hogy a rostokat a festékanyagok természetét nem befolyásoló rézsókkal impregnáljuk. Ezek — könnyebb szétbonthatóságuk miatt — a reájuk eső fényenergiát felveszik s így a színes sugarak a festékekre nézve ártalmatlanokká vannak téve. Ezzel gyakorlatilag is ki van mutatva a fixálás lehetősége, a mi egyébként úgyis elképzelhető, hogy oly fotografikus réteget állítunk elő, mely valamely anyag hozzá-

---

[1] HELMHOLTZ tábl. l. BATTA: Bevezetés etc. p. 9.

[2] Kitünik abból, hogy POITEVIN-nél csupán a narancssárgára nézve teljesülnek az elmélet követelései.

[3] L. WIENER: Wied. Ann. i. k. p. 267 és 1908. évi előadása a szinfotografozásról.

[4] L. BATTA i. m. p. 15.

keverése útján fényérzékenynyé lesz ugyan, de annak elvétele után a fényre nézve érzéketlen.[1]

*

WIENER ideális szinfogékony anyagában a mint láttuk, oly érzékeny réteget definiált, mely minden szines sugárra nézve egyenlő mértékben fényérzékeny. Azonban sem a régebbi,[1] sem az újabb,[2] általános használatban lévő fotografikus lemezek fényérzékeny rétegének anyaga nem tesz eleget e követelménynek. A kék és ibolya sugaraknak aránytalanul nagy, a vörös sugaraknak elenyészően csekély hatékonysága miatt a szines tárgyaknak közönséges fotografiai úton előállitott képe — még az árnyékolásban sem lehet hű. Természetes, hogy ez a fogyatkozás — a mint MAXWELL már 1861 május 17-én az angol tudományos akadémia előtt kifejtette[3] — erős akadály volt a közönséges fotografia, annyival inkább a színes fotografozás fejlődésében mindaddig, mig VOGEL az optikai szenszibilizátorok feltalálásával ezt a nehézséget le nem győzte.

H. W. VOGEL[4] — 1873-ban a berlini egyetemen a kémiai és fizikai tanszékek tanársegéde — a nap szinképének kémiai hatását tanulmányozta a jód, bróm és klórezüstön. Miután megállapította, hogy a közönséges lemezek valósággal szinvakok, (a tiszta brómezüst a vörösig, klórezüst A vonalig, jódezüstlemez valamivel tágabban mutat csökkenő érzékenységet. Ber. d. Deutsch. chem. Ges. 7. — 1874 p. 972.), figyelmét főleg, az akkor az érdeklődés középpontjában álló brómezüstkollodiumlemezekre irányitotta, a melyek különösen Angliában sokféle módon præparálva kerültek forgalomba. A præparálásoknak az volt az eredeti czélja, hogy a lemezek üveglapjából

---

[1] L. HERSCHEL (1840), DRAPER és HUNT (1843), MÜLLER (1856), SCHULZ—SELLAK (1871) stb. EDERS Gesch. etc. p. 315. TRAUBE és AUERBBACH i. m. p. 71.

[2] L. ABNEY: Phot. Mitth. 18. 1881. p. 130· H. W. VOGEL u. o. 19. 1882 p. 32 stb. stb.

[3] EDER: Gesch. etc. p. 428.

[4] Szül. 1834 márczius 26. Dobrilughban.

származó fényreflexióknak káros hatását csökkentsék s a tájképfelvételeket különösen zavaró ú. n. fényudvarokat kiküszöböljék. Ennek a czélnak legjobban megfelelt egy az angol WORTLEY[1] által forgalomba hozott lemez, melynek fényérzékeny rétege gummit, gallussavat, uránnitrátot s egy vörösszínű, a zöldsugarakat elnyelő festékanyagot tartalmazott. VOGEL észrevette, hogy ennek a lemeznek feltűnően nagyobb zöldérzékenysége van, mint az addig ismeretes többi lemezeknek s hogy ezt a hatást a réteghez kevert színes festékanyag idézi elő. Csakhamar rájött,[2] hogy — a sárga és zöld sugarakat elnyelő koralinnal festett brómezüstkollódiumréteg nagy érzékenységet mutat épen a sárga és zöld sugarakkal szemben, továbbá, hogy bizonyos zöldesszínű anilinfestékek a brómezüstkollódiumot vörösre is érzékenynyé teszik. Azt már VOGEL előtt is tapasztalták,[3] hogy bizonyos, a jódot vagy brómot kémiailag kötő anyagok kémiai szenszibilizátorként[4] hatnak és előmozdítják a jód vagy brómezüstnek fényben való szétesését, az ú. n. optikai szenszibilizátorok feltalálását azonban tévesen, sőt rosszakaratból tulajdonítja SCHIENDL,[5] SCHULTZ—SELLAKNAK,[6] teljesen a VOGEL érdeme az, a mint rajta kívül[7] EDER[8] is kétségkívül igazolta.

VOGEL felfedezését 1873-ban hozta nyilvánosságra[9] s a

---

[1] EDER i. m. i. h.

[2] Die Phot. farb. Gegenstände in den richt. Tonverhältn. Berlin 1883.

[3] L. Phot. Mitth. 11. k. p. 182.

[4] VOGEL: Pogg. Ann. 153 p. 218. EDER i. m. I. 1891. p. 250.

[5] EDER szerint SCHIENDL (Gesch. etc. p. 169) azért vesztette el bírálatában az objektiv szempontot, mert VOGEL az ő munkájáról éles, de jogos kritikát írt s ezért valósággal személyes ellenségévé lett VOGEL-nek. L. EDER Handbuch etc. p. 310.

[6] SCHIENDL S. S.-nak a Pogg. Ann. 143 p. 161, 439 és 449 megj. értékezéseire támaszkodik, a hol azonban szó sincs az optikai szenszibilizátorokról.

[7] Phot. Mitth. 27. k. p. 243 és 325.

[8] Phot. Corresp. 1891 p. 154.

[9] Ber. d. deutsch. chem. Ges. 1873. 6. p. 1305. VOGEL optikai szenszibilizátora helyett kezdetben a präservativ kevésbé präcíz név merült fel.

berlini fotografikus társaságnak ugyanezen év október 17-én tartott gyűlésén néhány szenszibilizált brómezüstkollódiumon felvett spektrumfotografiát is bemutatott. A bécsi császári fot. tan- és kisérleti intézetben őrzött, naftalinvörössel, koralinnal, illetőleg anilinzölddel festett brómezüstön felvett spektrumképekben valósággal meglepő a tiszta brómezüstön felvett képek mellett a lemeznek a különböző szinek iránt tanúsított, feltünően megnövekedett érzékenysége. Daczára azonban az első, történelmileg is érdekes fotografiák bizonyító erejének, VOGEL felfedezésének igazságát eleinte több oldalról is kétségbevonták. Legerősebben harczolt azok ellen MONCKHOVEN,[1] a ki nagy spektrográf alkalmazásával eredménytelenül ismételte meg VOGEL kisérleteit, a mi természetes is, ha megfontoljuk, hogy aránylag fénygyenge spektrumhoz nagy színszórású eszközt alkalmazott s így a gyenge szenszibilizáló hatást nem is észlelhette úgy, mint VOGEL, a ki STEINHEIL-féle kis spektrográffal dolgozott, a hol a kis felületre konczentrált erős fényhatás sokkal jobban megfigyelhető. CAREY LEA,[2] SPILLER[3] stb. kisérleteikből szintén VOGEL állításának helytelenségére következtettek s VOGEL velök, valamint SCHULTZ—SELLAK-kal hosszas vitát folytatott[4] adatai helyességének megvédelmezésére. Segítségére jöttek E. BECQUEREL[5] (1874) kisérleti adatai, melyekkel beigazolta, hogy pld. a klorofillal festett kollódiumréteg tényleg nyer érzékenységében a spektrum *B* és *C* vonalai között, valamint ellenfelének CAREY LEA-nak[6] újabb vizsgálatai, melyekben fel-

(EDER i. m. p. 250.) BOTHAMLEY a selectiv szenszibilizátor nevet ajánlotta és használja (EDERS Jahrb. f. Phot. 1889 p. 400).

[1] EDER i. m. p. 318.

[2] Szerinte a VOGEL által ajánlott tannin nem emeli az érzékenységet. L. Fortschr. d. Phys. 33 (2) p. 578. Beibl. 1. 1877 p. 405.

[3] Phot. Mitth. 11. k. p. 27 és 97.

[4] Ber. d. chem. Ges. 7 p. 386 és 500. A jód érzékenyitéséről. F. d. Phys. 28 p. 438, u. 30 p. 596.

[5] C. R. 79 (3), 1874 p. 183—195. L. továbbá ZENGER C. R. 97. 1883 p. 552, 1885-ben IVES, újabban EBERHARDT, EDERS Jahrb. f. Phot. 12. 1898 p. 517.

[6] Fortschr. d. Phys. 30. 1874 p. 596.

fedezte, hogy az ezüstbromidréteg színérzékenységét szalicil hozzákeverésével — vörös- és narancs-sugarakra nézve — jelentékenyen lehet emelni.

Vogel[1] három feltételt és szabályt állapitott meg arra nézve, hogy valamely festékanyag érzékenyítőleg hathasson. Először is a szenszibilizáló festékanyagoknak absorbeálniok kell azon fénysugarakat, melyekre nézve a kollódiumréteget érzékenynyé akarják tenni s valamely festékanyag elnyelési és fajlagos érzékenyítő képessége között az a törvényszerű összefüggés áll fenn, hogy a festékanyag általában a saját színéhez komplementer sugarakra nézve érzékenyít, a szenszibilizálás területét pedig a festékanyag pontosabban a festett réteg[2] elnyelési spektrumának a rácsspektrumhoz való viszonya szabja meg. Másodszor az érzékenység függ a réteg kémiai szétbonthatóságától, a kötőszer és festékanyag szemcséinek egymáshoz való viszonyától, az érzékenyítő oldat konczentrácziójától s a festékanyagnak a szabad brómot vagy jódot lehetőleg kötnie kell. hogy kémiai szenszibilizátorként is hathasson.[3] Végül a festékanyagnak a salétromsavas ezüstöt nem szabad megtámadnia, különben a lemez præparácziója megsérül. Ilyen anyagok Vogel szerint: vörösre a cyanin, sárgára a metilibolya és a naftalin, ibolyára a tannin, zöldre a morfin, továbbá a purpurin alkoholos oldata.[4]

---

[1] Ber. d. deusch. chem. Ges. 1874. 7 p. 972.

[2] Úgy a folyós emulzió festésénél, mint a száraz lemezek fürösztésénél ugyanis nemcsak pld. a brómezüst, hanem annak a kötőszere (kollódium, zselatin stb.) is megfestődnek; a festett kötőszer fényszűrőként hat s előidézi az érzékenységi csík gyengülését, eltolódását vagy alakváltozását. Ez eltolódást és alakváltozást először Hübl figyelte meg (Phot. Corr. 1895) s behatóan G. Eberhardt (u. o. 1896 p. 42) tanulmányozta.

[3] Pld. a naftalin — mint Vogel kimutatta (Ber. d. chem. Ges. 9. 1876 p. 667) magában alkalmazva nem képes sárga érzékenyítésre, kell hozzá egy oly test, mely a brómot vagy jódot kémiailag erősen köti. L. még Hübl Beibl. 18. 1894 p. 761.

[4] Ber. d. chem. Ges. 9. 1876 p. 667, u. o. 10. k. 1877 p. 692. Főleg azok a szintelen testek módosítják az ezüstsók érzékenységét, melyek a

Vogel felfedezése azért nem tudott a gyakorlatban egyszerre tért hóditani, mert az utolsó feltétel nem teljesült s az eleinte használt fényre érzékenyitő anyagok szétbontólag hatottak a fotografikus rétegre,[1] különösen, ha egy és ugyanazon lemezt a spektrum több szinére érzékenyítendő — több szenszibilizátorral láttak el. Megtaláljuk a magyarázatát «annak a rendkivül érdekes jelenségnek, hogy Vogel találmányát először nem otthon, hanem Francziaországban alkalmazták először a fotografozási gyakorlat czéljaira», [2] ha megfontoljuk, hogy az érzékenyitők első felhasználói Ducos du Hauzon és Chros a háromszinnyomáshoz alkalmazták eredménynyel azokat, a hol csakis az alapszínekre külön-külön érzékeny lemezekre volt szükségük.

Ducos du Hauzon előbb (1875) klorofillal és koralinnal, később (1878) a Waterhouse[3] által (1876) felfedezett eosinnal is dolgozott, melynek zöld érzékenyitő hatásáról már Amory (1877) is jó tapasztalatokat szerzett. Chros[4] még 1879-ben foglalkozott a különböző, szines organikus festékanyagokkal kevert brómezüstréteg szinérzékenységének vizsgálatával és a klorofill, valamint a kurkumin alkoholos oldatával végzett kisérleteiből kitünt, hogy a lemezek mindig az illető festékanyagok által elnyelt fénysugarakra mutattak különös érzékenységet. Brain franczia fotográfus (1877) nedves eosinkollódiumlemezeken, E. Albert ugyancsak szines festmények másolására a gyakorlatban is nagy sikerrel dolgoztak az érzékenyítőkkel, sőt ez utóbbi képeit az 1883-iki müncheni művészkiállításon is sokszor megcsodálták.[5]

---

fotogr. redukció processusát elősegítik (Vogel u. o. 7 p. 976) Eder a megfigyeléseket megerősíti s megállapítja, hogy a brómezüstzselatinnál maga a zselatin hat érzékenyítőként.

[1] L. Vogel: Verh. d. phys. Ges. Berlin 1884. p. 28 és Ber. d. chem. Ges. 17 k. p. 1196.

[2] Eder i. m. i. h.

[3] Phot. Mitth. 1876. 13 p. 17.

[4] C. R. 88. 1879 p. 379. L. Beibl. 3 p. 359.

[5] Phot. Corr. 1883. évf.

VOGEL mellett különösen kiválik az optikai szenszibilizátorok tulajdonságainak eredményes kutatása terén J. M. EDER,[1] a bécsi műegyetem fotokémikus tanára s a grafikai tan- és kisérleti intézet igazgatója. A mellett, hogy a kémiai szenszibilizátorok karakterizáló tulajdonságait megvizsgálta,[2] a zselatin-emulzióknak[3] és igen sok festékanyagnak[4] érzékenyitő hatását kikutatta, ő találta fel a sárga és zöld színérzékenyítésre különösen alkalmatos erythrosin[5] festékanyag használhatóságát s találmányát még a felfedezés évében (1884) a tudományos világgal önzetlenül közölte.[6] Utána ABNEY és EDWARD[7] különböző festékanyagokat, LIESEGANG[8] és RUH[9] az erythrosint és pikrinsavat, HÜBL báró,[10] HINTERBERGER[11] és ECKERHARDT[12] a cyanint, E. VALENTA[13] a vörös és zöldérzékeny äthilibolyát, SCHUMANN[14] a cyanin érzékenyitő hatását vizsgálta meg. A gyakorlatban[15] különös nevezetességre tettek szert H. W. VOGEL száraz azalinlemezei, melyek a kinolinvörös és a cyanin kombinálása által — mennyiségileg elég külömbséggel ugyan,

---

[1] A bécsi fizikai és chémiai társaság elnöke. Szül 1855 márcz. 16-án Kremsben. L. Pogg. Biogr. etc.

[2] Beibl. 1880. 4 p. 470.

[3] Phot. Corr. 21. k. p. 95.

[4] Wien. Ber. 90 (2) p. 1097, u. o. 94 (2) p. 378. Phot. Corr. 21. k. p. 95 és 130 stb.

[5] Tetrajodfluoresceinkálium.

[6] Sitzber. 3 i. h. A találmány történetét l. EDER Phot. Corr. 1890. évf., hol EDER kétségbevont prioritását is megvédi.

[7] Beibl. 14. 1890 p. 791.

[8] U. o. 18. 1894 p. 341.

[9] Phot. Corr. 1898 p. 35.

[10] EDERS Jahrb. f. Phot. 8. 1894 p. 11 és 189, u. o. 1897 p. 165.

[11] Phot. Corr. 1896 p. 131.

[12] U. o. 1897 p. 129 és 185.

[13] U. o. 1899 p. 336.

[14] EDERS Gesch. i. h. p. 323.

[15] Érzékenyitő fürdőreceptek és görbék összeállitását l. HÜBL i. m. p. 102—108. A különösen viselkedő s fotokémiai oxydáció folytán festékanyagokat keltő u. n. Leukótestek fényérzékenységét O. GROS fedezte fel 1901-ben. Ztr. f. Phys. Chem. 1901. 37 p. 157. A hasonulási eljárás egy módositásával szín-fotogr.-hoz is alkalmaztatnak. L. EDER Gesch. p. 450.

de — jó sárga, zöld és vörös, továbbá ALTOUT eosinnal érzékenyitett brómezüstzselatinlemezei, melyek jó zöldérzékenységet mutattak, KÖNIG pinachrom (T)-je,[1] EDER—LÖWY és PLENER erythrosinnal, HIGGS[2] (1891) alizarinkékkel, VALENTA akridinsárgával részben színérzékenynyé tett ortokromatikus lemezei,[3] végül EBERHARD vörösre, narancsra, sárgára és zöldre érzékeny pánkromatikus, MIETHE[4] (1903) és TRAUBE[5] isocyaninjai, äthylvöröset tartalmazó s a mint arról több ily rétegen felvett spektrogrammon alkalmam volt meggyőződni a vöröstől az ibolyáig közelítőleg egyenletes érzékenységet mutató perkróm lemezei.

VOGEL a napspektrum kémiai hatása, az absorpczió és anomális disperzió közötti összefüggés kisérleti tanulmányozása alapján azt a tételt állította fel, hogy különböző festékanyagok keveréke egyesiti az alkotórészek előnyeit.[6] Cyaninnal és eosinnal festett lemeznél azonban én is meggyőződtem arról, hogy a keverékben áztatott lemez jóval alacsonyabb narancs- és zöldérzékenységet mutat annál, a mit e festékanyagok egyenként idéznek elő s igy a DONÁTH által formulázott[7] tételt kell igaznak tekintenünk, mely szerint: «Ha a fotografikus réteget két vagy több festékanyaggal vonjuk be, akkor az egyes festékek hatása majd minden esetben jelentékenyen meggyöngül, sőt az egyik jelenléte néha teljesen megakadályozza a másik érzékenyítő hatását.» Közelfekvő gondolat ezt a jelenséget úgy

---

[1] KÜMMEL: Photochemie p. 58 és DONATH: Die Farb. phot. etc. p. 99.

[2] Phot. Corr. 1894 p. 227.

[3] Értékes adalékokat szolgáltattak az érzékenyitőkhoz Gothard Jenő Phot. Rundsch. 1887, p. 3., Liesegang (Phot. Archiv. 1893 p. 729) stb.

[4] L. A. MIETHE és G. BOOK: Ber. d. chem. Ges. 1903 p. 2008.

[5] TRAUBE u. AUERBACH: Gesch. d. Phot. p. 78. TRAUBE MIETHÉ-vel együtt a perrantólemezekben VOGEL-nek azt a gondolatát valósította meg (Pogg. Ann. 153 p. 218), hogy a rétegtartót valamely festékkel akkép fessék hogy ne a brómezüst, hanem csak a zselatin vagy a kollódium etc. vegye fel a festékeket.

[6] Ber. d. chem. Ges. 7 p. 976.

[7] I. m. p. 99.

magyarázni, hogy a brómezüstrészecskék csak korlátolt mennyiségben vehetik fel a festékanyagot s így több szenszibilizátor használatánál minden egyes festékanyagból kevesebb maradhat azokon megkötve. Ennek a nézetnek azonban ellentmond az a tény, hogy az az arány, a melyben pld. két festékanyagot keverhetünk, nagyon tág határok között variálható a nélkül, hogy az érzékenységi viszonyok lényegesen megváltoznának. Az eddigi vizsgálatok azt mutatják, hogy az együttesen alkalmazott érzékenyítők hatékonyságát illetőleg elsősorban a festékanyagok kémiai alkata játszik szerepet, a mennyiben kémiailag rokon testek többször egymás mellett hatnak, míg a kémiailag különböző alkatú anyagok egymás hatását zavarólag befolyásolják. Külföldi tanulmányutam idején egyik feladatomúl tűztem ki, hogy az optikai szenszibilizátorok együttes alkalmazásának hatását tanúlmányozzam abból a szempontból, vajjon a komponens érzékenyítő festékanyagok magatartásából meglehetne-e állapitani az összhatás általános törvényeit ?! Fontos lenne ennek a kérdésnek a taglalása nemcsak a miatt, hogy a tökéletes pánkromatikus lemez rétegében — ha az t. i. a többi követelményeket is kielégiti — WIENER színfogékony rétegét kapnók meg, engem a feladat inkább a — röviden ismertetendő — STARK-féle érzékenyitő elmélet szempontjából érdekelt. Igen kényes természetü és fáradságos kísérleteim azonban — bizonyára az érzékenyítő rétegben végbemenő ellenőrizhetetlenül komplikáltnak tetsző kémiai folyamatok miatt — negativ eredménynyel végződtek. Tudtommal e kérdéssel — de tisztán kémiai szempontból — DAUR[1] foglalkozott s arra az eredményre jutott, hogy a kevert festékanyagoknak,[2] mint érzékenyítőknek nincsenek oly általános törvényei, hogy azokra a kombináláshoz használt egyes festékanyagok magatartásából következtethetnénk. A fotokémiai laboratoriumokban folyó munkásságnak elsősorban a használható festékanyagok itt értékesít-

[1] L. k. EDERS Jahrb. f. Phot. 23. 1909 p. 96.
[2] Eosin, cyanin, isocyanin, stb.

hető tulajdonságainak alapos kikutatása, másodsorban új használható festékanyagok felkeresése és tanulmányozása a czélja. A kutatás irányelveit pedig az érzékenyitők általános, közelebbről fizikai elmélete szabja meg.

Az optikai szenszibilizátorok fizikai elméletét először 1884-ben, rendszeresebben öt évvel később EDER fejtette ki. A bécsi fotogr. társaság emlékünnepén «Photokémiai jelenségek és a fény rezgési elmélete»[1] c. a. 1889 okt. 15-én tartott előadásában az elméletet következőleg építi fel:

Minden test legkisebb részecskéi folytonos — a test állapotától és minőségétől függő mozgást végeznek. A legkisebb részecskéknek ezt a mozgását részben molekuláról-molekulára ható fizikai, részben atomról-atomra ható s a test molekuláinak szétbontására törekvő kémiai erők idézik elő. KRÜSS és HARTLEY spektroszkópikus tanulmányai erős támaszát képezik e belső mozgások tényleges létezésének. Ha most már valamely testhez egy oly fényhullám érkezik, melynek rezgése megegyezik a molekula saját belső rezgésével, akkor a fényhullám rezgő mozgása, a már mozgásban lévő molekulára hatva a molekula rezgésének amplitudóját növeli. A fényhullám rezgő mozgását létesítő erő ezzel munkát végzett, munkaképessége átalakult a molekula rezgőmozgását tápláló energiába: a test a fényt elnyelte. Az absorbeált fényhullám hatása vagy a test hőmérsékletének emelkedésével termikus extinkcióban, azaz optikai absorpcióban, vagy pedig abban nyilvánul, hogy a fényrezgés a molekulák rezgésének amplitudóját olyan nagy mértékben növeli, hogy a molekulakomplexum szétszakad, azaz a fényenergia fotokémiai extinkciót létesít. Mivel a fény hullámelmélete szerint, az éter a testek legkisebb részecskéi között lévő űröket is kitölti, a molekulák mozgása által az éter is kényszeríttetik arra, hogy époly rezgő vagy forgó mozgást végezzen, mint a melyekből a molekulák mozgásai össze vannak téve. A fény által talált test viszont — a rezonancia-jelenség analó-

[1] Ausführl. Handbuch d. Phot. i. m. p. 258.

giájára — csakis azokat a rezgéseket veszi át a környezet éterhullámaitól, melylyel a test molekulái rezegnek vagy legalább is rezegni képesek. A különböző hullámhosszúságú sugarakat elnyelő anyagokra elsősorban is a legerősebb absorpció a jellemző, ez határozza meg a molekula ú. n. főrezgéseit, épúgy — hogy KRÜSS találó hasonlatával éljünk — mint valamely hangvilla főhangját annak legintenzívebb rezgései karakterizálják. Pld. a brómezüstemulziómolekulák — mint az absorpciós szalag vizsgálatával beigazolható — saját rezgésökkel összhangzásban levő 450 $\mu\mu$ hullámhosszúságú kékes fényre mutatnak érzékenységi maximumot, ezt nyelik el kiválólag, elsősorban ez képes megnagyobbítani a belső molekularezgések amplitudóját olyan mértékben, hogy a molekulák szétesnek. E mellett természetesen más hullámhosszúságú fényrezgések is hathatnak a brómezüstre, ezek a molekulákat mellékrezgésekre ösztönzik, mivel azonban sokkal gyengébbek, jóval nagyobb fényenergiát kivánnak arra, hogy a molekulák rezgésének amplitudóját azok szétszakitásáig növeljék, t. i. ilyen színes sugarakkal aránytalanul hosszabb ideig kell a réteget megvilágítanunk, ha abban fotokémiai hatást akarunk előidézni, ilyen sugarakkal szemben csekély a brómezüst fényérzékenysége. Így pl. a sárga-vörösfény rezgései nem egyeznek a brómezüstmolekulák saját rezgéseivel, a gyenge absorpciónak megfelelőleg azok a molakulák mellékrezgéseivé válnak, alig vagy igen sok idő alatt képesek némi kémiai hatás előidézésére. Ha azonban a brómezüsthöz — azzal vegyületté kapcsolódó cyanint, illetőleg erythrosint stb. keverünk, akkor, mivel a réteg most a vörös, illetőleg a sárga fényt absorbeálja, a festett brómezüstrétegre eső megfelelő színű fény hullámai olyan molekulákra találnak, melyek rezgése épen e fénysugarak rezgésével áll a legerősebb rezonanciában és azok intenzívebb rezgő mozgását idézi elő.[1] Az erősen rezgő festékanyagmolekulák a velök belsőleg kötött brómezüstmolekulákat magukkal ragadják, annak mellékrezgéseit főrezgésekké

---

[1] L. KÜMMEL i. m. p. 66.

emelik s a molekulák szétesését, azaz a réteg vörös, illetve sárgaérzékenységét idézik elő. Hogy a feltünően viselkedő jódezüstöt, melynek főrezgései ugyancsak a spektrum kék sugarainak rezgésével egyeznek, igen kis mértékben tudjuk csak festékanyagok segélyével fényérzékenynyé tenni, EDER azzal a jódezüst anyagi szerkezetére utaló feltevéssel magyarázza, hogy a jódezüst molekulái aránylag rendkívül lassú, gyenge, «lusta» mozgást végeznek, annyira, hogy a különböző festékanyagok által mesterségesen emelt hatás sem elegendő e mozgás oly intenzívvé tételére, mely a molekulakomplexum szétszakadását idézné elő.

A történelmi igazság érdekében ismét meg kell jegyeznünk, hogy ezen EDER által rendszeresen felépített molekulárelmélet alapjait VOGEL[1] vetette meg, a midőn az optikai szenszibilizátorok hatásának magyarázatául felvette, hogy az érzékenyitő anyagok az általuk elnyelt fényhullámok energiáját a szomszédos, velük összeköttetésben álló brómezüstmolekuláknak adják át s ezzel azok szétesését idézik elő. ABNEY kétségbevonta az elmélet helyességét. Szerinte a festékanyag szétbontási produktumai hatnak redukálólag s ezzel együtt érzékenyitőleg a brómezüstrétegre s így valamely lemezt már azzal is szinérzékenynyé tehetünk, ha annak rétegfelületét vékony festékhártyával vonjuk be.[2] VOGEL, különösen EDER[3] azonban direkt kisérletekkel kimutatták, hogy az érzékenyitők gyanánt alkalmazható festékek hatékonyságára nézve a legfontosabb tényező a festékanyag molekuláris egyesülése a brómezüsttel.

Van azonban egy látszólagos ellentmondás az érzékenyitőknek VOGEL-EDER-féle elméletében. E szerint ugyanis az érzékenyitő festékanyag fényelnyelési — és az anyag által színérzé-

---

1 Phot. Mitth. 1888. 25, p. 117. F. d. Phys. 1884. 44, p. 174.

2 ABNEY és EDWARD épen ilyen módon tanulmányozták a különböző festékanyagok érzékenységét.

3 I. m. i. k., p. 324. Érdekes, hogy EDER e vizsgálatai közben a nigrosinban tartós szinű festéket fedezett fel jól használható vörös érzékenyitésre.

kenynyé tett lemezen a fotografikus hatás — maximumának össze kell esniök. Többen[1] azt tapasztalták, hogy ez a két maximum a valóságban nem fedi egymást. VOGEL ezt a jelenséget a KUNDT-féle szabálylyal magyarázza,[2] mely szerint valamely anyag elnyelési csíkjának helyzete az oldóanyag minőségétől is függ s e csíkok annyival inkább eltolódnak a nagyobb hullámhosszúság felé, mennél nagyobb az oldószer törésmutatója. A zselatinba beitatott festékanyag így hosszabb sugarakat nyel el, mint szabadon, úgy hogy a valóságban azok a sugarak hatnak érzékenyítőleg, melyek a lemez, nem pedig a festékanyag által nyeletnek el. VOGEL e felfogásának helyességét a saját maga kisérletein kivül EDER,[3] ACWORTH[4] stb. megfigyelései is igazolják.

Már A. VOGEL tapasztalta — 1813-ban,[5] — hogy néhány anyag (glaubersó stb.) kék fény hatása alatt erősebben fluoreszkál, mint vörös fény hatása alatt. E. VOGEL[6] (1891-ben) a fluoreszkáló testeknek a fotografikus rétegre gyakorolt érzékenyitő hatását tanulmányozva, azt találta, hogy feltűnően sok érzékenyitő anyag épen a fluoreszkáló testek osztályához tartozik. VOGEL azt állitja, hogy a fluoreszkáló és érzékenyitő képesség nem haladnak párhuzamosan, sőt néha — mint pl. az eosinnál — épen ellentétesen s így azok között nincs is szorosabb kapcsolat. WOREL[7] viszont újabb kisérleteiben megfigyelte, hogy egyes testek fényérzékenysége s különösen az anethollal kevert festékanyagok fényérzékenységének emelkedése összefüggést mu-

---

[1] Legjelentősebbek MESSERSCHMITT idevágó kisérletei (WIED. Ann. 25 1885, p. 673) s azok között a diamidobenzolra vonatkozó tapasztalata, hogy t. i. az annál sárgászöldre mutatkozó fotografikus hatás maximumához képest elnyelési csík nem jelentkezik. VOGEL is elismeri ezt a kivételes magatartást, de rámutat arra, hogy a spektrum az oldat karakterét megváltoztathatja.

[2] Ber. d. chem. Ges. 7. k., p. 974, WIED. Ann. 26, p. 527.

[3] WIEN. Ber. 92. (2.), 1885.

[4] WIED. Ann. 42, 1891, p. 371.

[5] L. RUHLAND: GILBERTS Ann. 18. 1814, p. 375.

[6] WIED. Ann. 43. 1891, p. 449.

[7] EDERS Jahrb. f. Phot. 18. 1904, p. 42.

tat a festékanyagok fluoreszkáló képességével. J. STARK[1] arra a tapasztalati tényre támaszkodva, hogy a legtöbb fényérzékenyítő — kémiai értelemben — a különösen nagy fluoreszkáló képességgel bíró benzolszármazékok osztályához tartozik, messzebbmenő következtetéssel azt az elméletet állította fel, hogy a különböző testek fényérzékenyítő hatását az ezüstmolekulákkal kevert ezen anyagrészecskéknek, a molekulák által fellépésükkel majdnem egyidejűleg elnyelt latens fluorescens sugárzása idézi elő. A legerősebb latens fluorescencia megfelel az anyag absorpciós maximumának s a brómezüst érzékenyítése valószínűleg bizonyos, az anyag ilyen fluoreszkáló állapotával meghatározott, igen komplikált termofotokémiai reakczió eredménye.[2] Az erythrosinnal és cyaninnal teóriájának támaszául végrehajtott kisérleteit KONEN (?)[3] megismételte s annak kimutatásával, hogy a legintenzívebb latens fluorescencia nem felel meg az illető anyag fényelnyelési maximumának, STARK elméletét nagyon valószínűtlenné tette. Egyébként — mint EDERnél[4] olvassuk — újabban STARK is meggyőződött arról, hogy az absorpció az érzékenyítőknél valószínűleg latens fluorescencia közvetlen keltése nélkül is bekövetkezik s azért elméletét — legalább egyelőre — maga is elejtette.

*

A WIENER-féle elmélet gyakorlati megvalósítására s az egyenletesen érzékeny színfogékony anyag előállítására még igen kevés, de bíztató kisérleteket végeztek. Azok közül inkább csak a régebbi tapogatódzó eljárások folytatása GRABY és KITZ munkássága.

GRABY[5] — a mint a franczia tudományos akadémiával 1896-ban közölte — először ezüstlemezeken s a napfény behatásával ibolyaszínűvé tett ezüstklorürön állított elő színes képeket.

[1] Phys. Zeitschr. 8. 1907, p. 248.
[2] U. o. 9. 1908, p. 481, 661, 894.
[3] KAYSER: Handbuch d. Spektr. 4. (2.) 1908, p. 1008.
[4] Jahrb. f. Phot. 23. 1909, p. 291.
[5] U. o. 1897. 11, p. 423.

Megfigyelése szerint, a színek előállása első sorban a klór és ezüst közötti arány függvénye, a krómsav, általa előidézett kémiai folyamatok útján, a színek előidézésében — a mint különben már POITEVIN is tapasztalta — csak másodrendű szerepet játszik. Érdekesebbek a WIENER-féle elmélet szempontjából GRABY-nek a LUMIÈRE-féle klórcitratpapirosra vonatkozó tapasztalatai, hogy t. i. annak fényérzékeny rétege napon ibolyaszínűvé téve, higított sósav és káliumbikromáttal való kezelés után — 70 cm^3 víz, 5 csepp salétromsav, 2 cm^3 higanynitrát, 3 cm^3 sósav, 1 cm^3 kénsav, 3 gr nátriumalaun, 1·5 gr krómsav keverékéből álló — színérzékenyítő fürdőbe hozva, nedves állapotában, elég jól reprodukálja a színeket.

A Chr. Kitz[1] 1897-ben azt vette észre, hogy az OBERNETTER-féle fényérzékeny papiros, ha azt diffúz fény hatásának addig teszszük ki, míg sötétbarna színt mutat, a ráteklelett diapozitiv színes képét «megközelítő hűséggel» lemásolja. A fixáló kisérletek épúgy mint GRABY-nél nála is eredménytelenek maradtak ugyan, de a képek, a fény behatásától megóvott helyen, hosszabb ideig megőrizhetők.

WIENER hasonulási elméletének értelmében feltehetjük, hogy GRABY klórcytrát, M. DE SAINT FLORENT említett celloidin papirosa, valamint az OBERNETTER-féle papiros érzékeny rétege, POITEVIN és VERESS munkálataihoz hasonló részben színfogékony anyagok, melyekben a színes fény behatása alatt az elmélet követeléseit többé-kevésbé kielégítő színes fényérzékeny fototestecskék állanak elő.

DAVANNE,[2] a POITEVIN-féle képeken a színek előállását magyarázó s a LIESEGANG és WIENER-ével lényegében egyező, de — úgy látszik — tőlük függetlenül felállított elméletének taglalása közben ezt mondja: «Úgy hiszem, hogy a fény e lemezeken a szinek felvételére alkalmas klórvegyületet részben elszínteleníti t. i. minden egyes színes sugár a vele egyező színt

[1] U. o. u. a. k. p. 61.

[2] EDERS Jahrb. f. Phot. 10. 1896 p. 499, EDERS Gesch. etc. i. k. p. 449.

izolálja, a többieket — elhalványítás útján — szétzavarja.» Vallot[1] — Davanne fejtegetéseit tovább fűzve így okoskodik: «Ha az elmélet helyes, akkor lehetségesnek kell lenni színes fotografiákat oly módon állítani elő, hogy a színes üvegekkel megszűrt fényt nem épen az ibolyásszínű, tehát előzőleg a napfény hatásának kitett ezüstklorürre, hanem egy oly fényérzékeny keverékre engedjük hatni, a mely különböző színű fényérzékeny anyagból van összetéve.» Vallot ez önálló eszméjét — Leon Vidal-hoz intézet levelének[2] tanusága szerint — következőleg gondolta megvalósíthatónak: Fehérfényben gyorsan és közel egyenletesen halványodó anilinbibor (0·2 gr), viktoriakék (0·5 gr) és kárkumin (10 gr) vizes, illetőleg alkoholos oldatát összekeverte. E sötétbarnaszínű keveréken fényérzékeny zselatinpapirost úsztatott úgy, hogy a papir rétegét egy vékony «színérzékeny» festékhártya vonta be. Á papirost megszárítva, színes diapozitiv alatt, a direkt napfény hatásának tette ki. A kékfény csak a sárga és vörös, a sárga csak az őt elnyelő kék és vörös, végül a vörösfény ugyancsak az elnyelés miatt csak a kék és sárga festékanyagokat fehérítvén ki, az alapszínekkel festett diapozitivok megfelelő, hű színes másolatait kellene nyernünk. Vallot, a Vidal-hoz küldött próbaképek színeinek nehány hibáját azzal magyarázta, hogy nem sikerült három oly festéket találnia, melyek a fehér fényben ugyanazon idő alatt halványulnának el. Különös bajt okozott a sárga kurkumin, a mely a fény hatása alatt sokkal gyorsabban szétbontatott, mint a vörös és a kék festék. Mivel pedig úgy festett kollódium, mint zselatinemulzión három-négy napi expozicióra volt szükség a színek előállására, a különböző fényérzékenységű festékanyagok halványulási viszonyai nagyon összebonyolódtak s a színek gyengén, halványan jelentkeztek. Ugyanezeket a hibákat konstatálta Lumière,[3] a Vallot mód-

---

[1] L. Monit de la Phot. 1895 p. 318. Phot. Wochenbl. p 417.
[2] 1895 okt. 15.
[3] Eders Jahrb. i. h. L. Bull. Assoc. Phot. 1896 p. 300.

szerével előállitott színes képeken s megállapitotta, hogy a képek egyáltalán nem tarthatók, a másolatok igen hamar tönkremennek. K. WOREL 1898-ban azt találta, hogy a VALLOT előírása szerint előállított képeken a kék igen jól, a vörös meglehetősen, a sárga és zöld azonban rosszúl vagy egyáltalában nem jelent meg. Megpróbálta a festékanyagok quantitativ viszonyainak változtatásával a képeket javítani, de eltekintve attól, hogy az expoziczióidő teljes napfényben 24 órára szállott le, más javítást, jobb eredményt nem tudott elérni.

VALLOT eredeti kisérleteinek ismétlése közben támadt WOREL-nek az az eszméje, vajjon nem volna-e lehetséges a festékanyagok érzékenységének mesterséges emelésével a hosszú expoziczióidőt egy oly anyaggal redukálni, mely egyszersmind a különböző festékanyagok különböző fényérzékenységére is szabályozólag hatna s azokat — WIENER elméletéhez közelebb hozva — lehetőleg minden színre nézve egyenlő mértékben tenné érzékenynyé. A véletlen útján jutott az első ilyen anyaghoz. A festékemulzió oldásának gyorsítására ugyanis kámfort kevert ahhoz s azt tapasztalta, hogy az ilyen emulzióval bekent fényérzékeny papiros sokkal magasabb és egyenletesebb fényérzékenységet mutatott, mint a kámfor alkalmazása nélkül előállitott réteg. Ez a tapasztalat mutatta meg WOREL-nek a czélhoz vezető utat. Kiderült, hogy az ætherikus olajok némelyike jó érzékenyítő s ezek között kiváló helyet foglal el az ánizs olaj s ennek tulajdonképeni hatékony része az anethol. WOREL egyik kisérletét [1] megismételtem s famentes irópapírt s primróza (világosbuzérlakk), viktoriakék, cyanin, kurkumin és auraminalkoholos oldatának anethollal való keverékébe áztattam. Az előírás szerint 20 C°-ra melegített fürdőben a papirost megáztatva még nedves állapotában a napfény hatásának tettem ki. Míg WOREL-nél 5′ alatt, nálam a négy első sikeresebb

[1] Klny. a Wien. Ber. 1902. évf. El. márcz. 13. L. E. Jl. i. h. WOREL már 1901 nov. 12-én néhány jól sikerült színes képet mutatott be a gráczi amatörfotografusok klubjában. L. E. J. 16. 1902 p. 544.

próbánál[1] legkevesebb egy óra alatt, egyetlen legszerencsésebb esetben 28' alatt kezdett a réteg szinesedni. A diapozitiv színei nagyon halványan, sárgás fátyollal bevonva jelentkeztek, a kék és zöld hatást alig lehetett megkülönböztetni, egyformán igen elmosódott inkább zöldeskéket mutatott a kép. Aránylag legjobb a sárga, míg a vörös helyek sötétbarna rozsdavörös, sőt néhol árnyalatlan barnatónusú sávokban jelentkeztek. A «színek» megjelenése után a képeket körülbelül egy óra hosszáig benzinben fürösztöttem[2] s azután megszáritva — WOREL tanácsa szerint — 3 óráig telitett rézgálicoldatba áztattam, leöblitettem és megszáritottam. A két sikerültebbnek mondható másolat — az egyik szobám sötétebb helyén, a másik iróasztalom fiókjában — igen hamar tönkrement: amaz három óra multán, emez négy nap elteltével a szineknek nyomát sem mutatta. WOREL legjobban sikerült képei direkt napfényben «igen hamar», diffúz fényben «pár hét alatt» romlottak el, de sötét helyen tartott mappába zárva, azokat több ideig is sikerül megőriznie. WOREL művirágokat kamara alkalmazásával is némi sikerrel fotografált. Eljárásának főhibájául jegyzi fel[3] maga is, hogy a feketét barnaként adja vissza, a minek oka szerinte abban keresendő, hogy a színfürdőhöz alkalmazott festékanyagok nem egyenlő idő alatt halványodnak: a sárga a leggyorsabban, a vörös kevésbé gyorsan s a kék a leglassabban. Mivel így bizonyos idő elteltével a kék és vörös felett a sárga színtonus uralkodik — a szinkeverék nem feketét, hanem barnát adott. A képek fixálása semmi módon sem sikerült.

Bizonyára értékes és érdekes adalékokat szolgáltat a hasonulási eljárás elméletéhez és fejlődéséhez WOREL azon megfigye-

[1] Körülbelül 15 azonosnak vélt összeállítású kisérlet teljesen sikertelen maradt.

[2] Ugy tetszett, hogy a benzinfürdő nem használt, sőt ellenkezőleg még halványabbakká tette a különben is nehezen észlelhető színeket. A legutolsó fürdő sem javította a szinhatást.

[3] EDERS Jahrb. f. Phot. 17. 1903 p. 68.

lése,[1] hogyha a külön érzékenyitők hozzáadása nélkül kevert festékanyagokat anorganikus alapra rakta fel, akkor a fényen kívül bármely ritkított állapotban ugyan, de levegő jelenléte is szükséges a hasonulás folyamatának végbemeneteléhez, organikus alap alkalmazása mellett ellenben az alkalmazkodás légüres térben is jelentkezik. Tapasztalta továbbá, hogy a színalkalmazkodási folyamat annál gyorsabban megy végbe, mennél higabbak a festékoldatok s a színeredmény szempontjából legjobb a rétegeket celluloin alapra egymás mellé rakni fel. Hogy vajjon az anethollal kevert festékanyag hasonulásának oka kémiai[2] avagy fizikai eredetű változás-e, WOREL e kérdésre — miután igen sok oxydáló és redukáló anyaggal s az ánizsolajon kivül több ætherikus olajjal kisérletezett — úgy felel, hogy a halványodást nem oxidáció idézi elő, hanem a fénysugarak behatása alatt a festékanyag valószínűleg oly molekuláris változásokat szenved, a melyek következtében fizikai magatartását változtatja meg.[3]

1897-ben fedezte fel DITTMAR orosz fizikus, hogy a thymollal vagy ezzel rokon más phenolszármazékkal kevert fuxinfesték «fény iránt különösen érzékeny s színes diapozitivok papiroson való másolására nagyon alkalmas». NEUHAUSS,[4] DITTMAR kisérleteit megismételte, azokkal gyenge eredményeket kapott, a hatás azonban jelentékenyen javult ha a thymolos fuxinlemezt használat előtt direkt napfénynyel világitotta meg. Ilyen állapotban a lemezen, néhány nap alatt, a diapozitiv elég jó színes másolata állt elő. Hogy a thymollemez, WIENER színfogékony rétegének tulajdonságait némileg is mutatja — NEU-

---

[1] L. K. WOREL: Eders Jahrb. f. Phot. 18. 1904 p. 42.

[2] Itt említjük meg, hogy P. CHASTAING (Ann. d. chim. (5) 11 p. 145) a fény kémiai hatásának új elméletét állította fel azon az alapon, hogy a spektrális sugarak hatása binär vegyületekre kétszeres t. i. a kék és ibolya zónában redukáló, a vörösben oxydáló. VOGEL 1877-iki (Ber. d. chem. Ges. 10 p. 1638) kisérletei óta az elmélet megdöntöttnek tekinthető.

[3] WOREL: EDERS Jahrb. f. Phot. 19. 1905 p. 7.

[4] Phot. Rund. 1898 p. 291.

HAUSS szerint — onnan van, mert a lemez sötétlilaszínű érzékeny rétege különböző színű fényérzékeny anyagok keveréke. NEUHAUSS érzékenyítő gyanánt — különösen zselatinhoz — hydrogénsuperoxidot ajánlott.[1] de HŰBL báró[2] és MIETHE[3] megbízhatóbbnak itélték WOREL ætherikus olajait.

Sok időt és fáradságot szentelt az ideális festékanyagok kutatására R. G. NEUHAUSS.[4] 1901 nyarán kezdett s 1902-ben folytatott kisérletei közben részint zselatinba ágyazott, részint egyszerűen papirosra kent 65 különböző festékanyagot vizsgált meg[5] s első kutatásainak eredménye, hogy a festékanyagok fényérzékenységét perszulfát keverékekkel erősen emelte s a fixálásnál általán használt, de erős zöld tónust adó s így a tiszta szinhatást zavaró rézsókat mellőzte.[6] A lemez szárításánál fellépő s a szinek kifejlődését zavaró oxygénbuborékok kiküszöbölésére, alkalmas fürdőt állított össze s azt is tapasztalta, hogy a tiszta meleg viznek igen jó hatása van az elfakult színek regenerálására.[7] Folytatólag végrehajtott újabb kisérleteiben[8] egyfelől az általa használt festékanyagok (methilénkék, erythrosin és auramin) relativ tömegeit változtatgatta, másfelől az érzékenység emelésére cervegyületeket (cerinitrat, sulfát etc) alkalmazott. Megkisérelte a hydrogénszuperoxydot más (nátrium, cink stb.) szuperoxyddal helyettesíteni, de nem kapott használható eredményeket. Érdekes megfigyeléseket végzett NEUHAUSS azon festékanyagokon,[9] melyek oldatokban,

---

[1] NEUHAUSS: EDERS Jahrb. f. Phot. 16. 1902 p. 20.

[2] Phot. Mitth. 1902 p. 97.

[3] EDERS Jahrb. f. Phot. 17 1903 p. 47.

[4] Szül. 1855 okt. 17-én Blankelfeldén, 1882 óta gyakorlóorvos Gr. Lichterfeldén.

[5] NEUHAUSS E. J, f. Phot. 17. 1903 u. o.

[6] E helyett a lemezeket — leöblítés után — kevés eczetsavas nátront tartalmazó tanninoldatba (10%) fürösztötte s újolagos lemosás után ólomeczetsav telített oldatába mártotta.

[7] NEUHAUSS; E. J. f. Phot. 18. 1904 p. 62.

[8] NEUHAUSS: U. o. 19. 1905 p. 51.

[9] A festékanyagok magatartásának felderítéséhez értékes adatokat szolgáltatott KÜMMEL (E. J. 20. 1906 p. 456), újabban LASAREFF (E. J. 22. 1908

ultramikroszkópikus vizsgálattal megkülönböztethető finomabb vagy durvább szemcsékre esnek szét; megállapitotta t. i. hogy a durvább részecskéknek az oldatok ösz-szinétől eltérő «önálló diffúz szinök» van, a mely szín a festékekhez kevert különböző anyagoknak (zselatin, uranin stb.), az oldat frisseségének és koncentrácziójának függvénye, továbbá megfigyelte, hogy «a finomabb szemcséjű» oldatok fénybehatása alatt könnyebben halványulnak, mint a «durvább szemcséjű» festékoldatok. Legújabb kisérletei szerint legjobb érzékenyitő a klorálhydrát s ennek hatását nehány csepp maronátron hozzáadásával még inkább fokozhatjuk.

J. Szczepanik azt tapasztalta, hogy a zselatinba kevert festékanyagok, kölcsönös reakciójuk miatt eredeti színeiket megváltoztatják, érzékenységök megkisebbedik, másfelől, hogy a Wiener-féle elmélet megvalósításának legfőbb akadálya egyenletes érzékenységű anyagok előállitása, melyek halványulási sebessége egyenlő lenne.[1] Mivel elméletileg, a rétegben különálló festékanyag meghatározott halványulási sebességgel ruházható fel, azért ő a hasonulási eljárást a háromszínfotografia szubtraktiv színtéziséhez közelebb álló módon úgy véli jobban megvalósithatónak, hogy a festékanyagokat elkülönitve egymás mellé, vagy fölé rétegezi. Előbbi esetben, mechanikus vonalozás útján a három nem állandó színű festék, vörös, sárga illetőleg kék vonal alakjában kerül egymás mellé, míg utóbbi esetben az alapszínekre festett s három üveglemezről külön-külön lehúzott, klorofillal érzékenyitett hártyácskákat egymás fölé helyezte s összepréselte. 1902 május 4-én szabadalmat nyert ilyen háromszínrétegen hasonulási eljárással felveendő színes képek előállításához.[2] Mivel a három festékanyag közül a

---

p. 446), a ki kimutatta, hogy az elnyelt fény energia legnagyobb része az absorbeáló réteg melegitését s ehhez képest csak csekély fotokémikus változást idéz elő.

[1] Pld. a hydrogénszuperoxyddal érzékenyitett erythrosin és auráminnál e sebességek viszonya 1 : 15.

[2] Phot. Industr. 1904 p. 70. Ed. J. f. Phot. 18. 1904 p. 415.

középső, a festékek zavaró keveredésének elkerülésére izoláló lakkal van elválasztva a másik kettőtől, a lak pedig nehézségeket okoz a képek fixálásánál, azért SZCEPANIK egy kisegítő szabadalmat vett,[1] melyben középső festékül oly festékanyagot alkalmaz, mely egyszersmind izolátor is.[2] Az így præparált papirosképek tényleg könnyebben fixálhatók.[3] NEUHAUSS, SZCEPANIK munkájának ismertetése és birálata közben — jogtalanul tart igényt az eljárás prioritására, a mikor arra hivatkozik, hogy ő már 1903 májusában végzett ily irányú kisérleteket. Nyilvánvaló, hogy SZCEPANIK őt még a szabadalomban is egy teljes évvel előzte meg.[4] NEUHAUSS[5] azt is kétségbevonja SZCEPANIK-kal (s az ő kisérleteit először ismétlő HŰBL-lel) szemben, hogy a festékanyagok rétegezése a keveréssel szemben előnyt ád; szerinte a rétegezés a tiszta kép előállítását nagyon s megnehezíti s a festékek keverékekben sokkal jobban eltarthatók. Ellenben W. GAMBLE,[6] HŰBL báró,[7] HANNEKE,[8] legújabban FR. LIMMER,[9] mindannyian elismerik SZCEPANIK eljárásának már ma is jelentékeny, de még sokban fokozható előnyeit.

Szines diapozitivok közvetlen másolására legújabban J. H. SMITH és W. MERCKENS zürichi doktorok utópapirosát tanulmányozzák. Az eljárás lényegében a LEON DIDIER által feltalált pinatypia módositása s alapja, hogy bizonyos, általuk felfedezett és meghatározott arányban kevert festékrészecskék,[10] nedves zselatinkollódiumrétegben, saját vándorlásuk folytán, me-

---

[1] 1903 január 7-én.

[2] A vörös zselatinrétegre egy sárga kollódiumréteget s erre ismét egy kék zselatinréteget helyez.

[3] L. i. h. p. 108.

[4] EDERS Jahrb. f. Phot. 20. 1906 p. 456.

[5] Phot. Rundschau 1904 p. 96.

[6] Phot. Mitth. 41 p. 59.

[7] Phot. Corr. 1904 p. 103 és 132. HÜBL a bécsi fot. társ. 1904 febr. 9. gyűlésén néhány jól sikerült SZCEPANIK-féle próbaképet is bemutatott.

[8] Phot. Mitth. u. o.

[9] Ph. Rundschau 1909 p. 20 és Ed. J. f. Phot. 23. 1909 p. 325.

[10] A festékek enyvet, kaseint stb. is tartalmaznak. R. l. Phot. Ind. 1907 p. 496.

chanikusan helyezkednek el rétegesen.[1] Az érzékeny hártyát tartó papiroslap még egy ernyőül szolgáló zselatinréteggel[2] is be van vonva, a mi egyúttal a festékanyagoknak a papiroson való átszivárgását is megakadályozza. Az érzékenyítő rendszerint anethol,[3] hydrogénszuperoxyd — tapasztalt káros hatása miatt — közvetlenül nem alkalmazható, de a vörös festékanyag halványitásának gyorsitására czélszerű magokat a papirmásolatokat épen hydrogénszuperoxyddal áztatott itatóssal vonni be. Az utópapiros különösen a Lumièrékhez[4] hasonló, de még finomabb mozaikokból álló (kbelül 1000 mező 1 mm^2-en) rácslemezek másolására alkalmas. Az expozicióidő napfényben állitólag nehány percz,[5] de néha — még kedvező esetben is — legalább 6 óra.[6] Kamarafelvételre a papiros nem alkalmas A fixálást az érzékenyitő kimosásával, illetőleg benzolfürdőben való áztatással eszközlik. C. W. CZAPEK,[7] LIMMER[8] és SMITH[9] az utópapirossal már eddig is elég jó eredményeket értek el.

*

Ezzel a pár adattal ki is meritettük az összes idevágó fontosabb tanulmányokat. H. KRONE, a ki WIENER fejtegetései alapján elméletileg körvonalazta az ideális színfogékony réteg karakterét, ezelőtt tizenöt évvel arra hivta fel[10] a kutatók

---

1 Phot. Wochenbl. 1907 p. 447.

2 T. i. kollódiumemulsio alatt.

3 NEUHAUSS terpentinnel tett próbát, BERGER (Drezda) három rész alkohol és egy rész terpentinnel tényleg jó eredményeket ért el. Phot. Rundschau 1907 p. 20.

4 A Lumière lemezek másolására LIMMER nem találta alkalmasnak. L. Ed. J. 23. 1909 p. 325.

5 L. WOREL Ed. Jb. 21. 1907 p. 5.

6 Phot. Ind. 1906 p. 531.

7 Phot. Wochenbl. 1907 p. 101.

8 Phot. Rundschau 1908.

9 Ed. Jahrb. Phot. 1909. 23 p. 523. SMITH. LIMMER-rel együtt alkalmasabb érzékenyitők után kutat. Zt. f. angew. Chemie 1908. 21 p. 2371.

10 Deutsch. Phot. Zeit. 1897 p. 41.

figyelmét, hogy tekintve az addigi kisérletek csekély gyakorlati értékét «a legintenzivebb kisérleti munkával és analyzáló figyelemmel lássanak hozzá» a festékanyagok és a hasonulási folyamat tanulmányozásához. Krone felhívását — sajnos — most is megismételhetjük, ma is igazak Neuhauss [1] szavai: A Wiener-féle elmélet, a közvetlen testszínfotografozás ez ideális megoldója, a kutatás mostoha gyermeke; talán azért, mert leszorítja ezt a mindenesetre mesterkéltebb háromszíneljárás, a hol könnyebben lehet elérni tetszetősebb, vakitóbb eredményeket!

Batta István.

---

[1] Eders Jahrb. f. Phot. 20. 1906 p. 14.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizenkilenczedik rendes közgyűlése.

A választmánynak márczius 11-én kibocsátott meghivójára a Mathematikai és Physikai Társulat XIX. rendes közgyűlését f. évi április hó 18-án tartotta meg, a melyen több vendégen kívül a következő tagok vettek részt:

Anderkó Aurél, Bálint Elemér, Bánki Donát, Bartoniek Géza, Beke Manó, Bihari Ferencz (Miskolcz), Bozóky Endre, Demeczky Mihály, Dienes Pál, Dietz Lajos, Egerváry Jenő, br. Eötvös Loránd, Fejér Lipót, Fekete Mihály, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Gáti Béla, Goldziher Károly, Gréber Nándor, Hajdú Pál, br. Harkányi Béla, Hoor Mór, Károly Irén, Kármán Ferencz, Kármán Tivadar, Klein Magda, König Dénes, Kopp Lajos, Körösi Kornél, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Lakits Ferencz, Lévay Ede, Lukács Ferencz, Mattyasovszky Kasszián, Mikola Sándor, Obláth Richárd, Onnel Henrik, Péch Aladár, Pécsi Albert, Pólya György, Privorszky Alajos, Radó Simon, Rados Gusztáv, Róna Zsigmond, Schimanek Ernő, Schwarz Magda, Somogyi Antal, Sós Ernő, Steiner Lajos, Szabó Gábor, Szabó Péter, Széky István, Szőke Béla, Szűcs Adolf, Terlanday Emil, Tolnai Jenő, Tőtössy Béla, Ujj Gyula, Visnya Aladár, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1912-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. A tisztikar és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd nyitotta meg. Rövid szivélyes üdvözlettel köszönti a nagy számban megjelent tagtársakat és felszólítja az ügyvivő titkárt jelentésének előadására.

A mult évi közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jelen ülés jegyzőkönyvének hitelesítésére Bozóky Endre és Széchy István tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Meghitt kicsiny családi körünknek, melyet nem csupán a közös studium és czél, hanem a kölcsönös megbecsülés és szeretet tart össze, ma, tizenkilenczedik rendes közgyűlésén, kettős örömünnepe van. Húsz éve, hogy a Mathematikai és Physikai Társulat kipróbált alapszabályai mellett együttműködünk és huszonöt éve, hogy mint akkor még szabad egyesület együttműködésre először találkoztunk. Ha szám szerint azóta nem gyarapodtunk, az nem azt jelenti, hogy fejlődni nem tudtunk, hanem csak azt, hogy már elejétől minden tényezőt magunkhoz tudtunk vonni, a kire ez országban egyáltalában számítani lehet. A ki a körünkben izmosodó fiatal tudósokat figyeli, a szellemi haladást nem fogja megtagadhatni.

De a kor fokozódó igényei, mint minden téren, anyagi fejlődést is követelnek már. Régen húzódik és ma is felmerül, a kormánytól való segélykérés kérdése, melyhez a Társulat traditióinál fogva csak kelletlenül nyúl. Nem tehetnénk-e mi is valamit?

Tapasztalásból tudom, épen nem csekély azok száma, a kiket általános műveltségöknél fogva a mathematika őszintén érdekel és a kik szeretnének behatolni az elvégre mindenkitől érthető philosophiai és logikai hátterébe. Innen van Beke tagtársunk szabad-lyceumi felsőbb mathematikai előadásainak nagy sikere, innen Poincaré népszerűbb tanulmányainak hatása. És nem fogja-e kellemesen meglepni a laikust, ha Poincaré utolsó könyvében a mathematikával kapcsolatosan a humaniorák elogiumát olvassa?

Természetesen nem gondolok arra, hogy minden érdeklődőt tagul vegyünk be, a mit különben — talán épen azok érdekében — alapszabályaink sem engednek meg. De tény, hogy a mindenre kiterjedő szabadoktatási tanfolyamok épen a mathematikát hanyagolják el. Nem található-e e téren orvoslás, mely az érdeklődőket is kielégíti és talán nekünk is előnyünkre lehetne?

Húsz társulati év: a mi esetünkben — kevés társulat mondhatja magáról — húsz éves elnökség. Tisztelettel és szeretettel csüggünk mindannyian a férfiún, a ki húsz évvel ezelőtt e Társulatot megalapította, ezóta is vezette, szives házigazdája és legszorgalmasabb tagja volt és a ki megemlékezésünket megelőzve, e húsz esztendős jubileumot csendben azzal ülte meg, hogy a Természettudományi Társulat legszebb kitüntetésével járó tiszteletdíj egy nagy részét nekünk adományozta.

Vannak esetek, a mikor az indiscretio erényszámba megy. Megmondom sebtében, miért is kettős ünnepünk a mai nap? Újabb húsz évvel megyek vissza és akkor találjuk báró Eötvös Lorándot, mint fiatal rendes professzort, Egyetemünkön.

Mindent, a mit e negyven évről mondhatnánk, a mit tőle még várhatunk, foglaljuk össze e szeretetteljes óhajtásunkban: Az Isten sokáig, sokáig éltesse!

És most bocsánatot kérve, nem ugyan a tisztelt Közgyűléstől, hanem elnökünktől, a miért olyanokat mondtam el, a mikhez előzetes beleegyezését nem tudtam volna megnyerni, térjünk át jelentésemnek technikai részére.

A XVIII. mathematikai tanulóversenyt a szokott modalitások mellett 1911 szeptember 30-án tartottuk meg. Bár úgy a versenyzők, mint a beadott dolgozatok száma az előbbi évhez képest fogyott, ezúttal mégis lehetséges volt az első díj kiadása. A nyertesek Hluczil Károly és Klein Gábor voltak.

Folyóiratunk XX. évfolyama 24 és fél ív terjedelemben jelent meg. Olvasóink benne a Bólyai-jutalomra vonatkozó jelentésen, a mathematikai oktatás reformjáról való könyvismertetésen kívül hat-hat szerzőtől ugyanannyi mathematikai és physikai tárgyú czikket találnak. Az év folyamán tartott tíz előadó ülésünk anyaga ugyancsak egyenletesen oszlott meg mathematika és physika között.

Társulatunk az év végén 397 tagot számlált, köztük 191 budapesti és 206 vidéki tagot; az előfizetők száma 111. Az utolsó évben tehát a tagok száma egygyel fogyott, ellenben az előfizetőké 23-mal szaporodott. A tagok között van 15 alapító tag és 4 hölgytag. Anyagi helyzetünk, miként a pénztárnok jelentéséből meghalljuk majd, nem kedvező, de még nem kétségbeejtő. Ügybuzgó pénztárnokunk általánosan ismert egyéb nagy és egész embert kivánó elfoglaltsága miatt a választmány nagy sajnálatára lemondani készül állásáról és szeretné, ha helyét Privorszky Alajos tagtársunknak adhatná át. Reméljük hát, hogy a nagyobb egyéni szabadság egy év mulva kedvezőbb pénztári jelentést irat új tiszttársunkkal.

Tagjaink közül elvesztettük: Kados Aladár, Kalecsinszky Sándor, Laeger Antal, Lengyel Sándor, Lutter János, Nemes Endre tagtársakat, a kik egynémelyike régebben előadó-üléseinken is tevékeny részt vett. Áldva legyen emlékök!

A hála szavaival fordulunk végre a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályához és Mathematikai és Természettudományi Bizottságához, melynek 2000 koronás segélye rendes bevételeinknek több mint felét teszi. Hálánk őszintesége és mélysége csak nyer azon közismert tény folytán, hogy az Akadémia maga sem él anyagilag gondtalan életet. Nagyon kérjük a Tudós Testületet, hogy jóindulatát számunkra a jövőre is megtartani kegyeskedjék.

És ezzel leteszem tiszttársaim nevében is, a három év előtt bizalmukból nyert mandátumot. Hálásan köszönöm a mindig készséges, szives támogatást, melyet különösen a szerkesztők és az előadóülések anyagát kereső titkárok élveztek, és kérem, hogy e jóindulatot az ujonnan megválasztandó tisztikarra is kiterjeszteni kegyeskedjenek.

Kérem a Tisztelt Közgyűlést, hogy jelentésemet tudomásul venni méltóztassék.

Budapest, 1912 április 18-án.

Kövesligethy Radó
ügyvivő titkár.

Elnök megjegyzi a tetszéssel fogadott jelentés kapcsán, hogy egy gyors, kis számvetés meggyőzte őt a reá vonatkozólag mondottak helyességéről. Megköszöni a kedves megemlékezést, a melynek a Társulat intim családi jelleget adott s reméli, hogy a Társulat anyagi felvirágozását is láthatja még: szellemi téren panaszra nincs oka.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1912-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Lévay Ede pénztárnok, a ki nagymértékű elfoglaltsága miatt állásáról már az első évi választmányi ülésen lemondott, de a választmány kérésére az ügyeket a közgyűlésig még vezetni szives volt, a költségelőirányzat beterjesztése és pénztárnoki jelentésének megtétele után lemond állásáról.

Báró Eötvös a visszalépő pénztárnoknak a közgyűlés nevében köszönetet mond és javasolja, hogy e köszönetnyilvánítás a jegyzőkönyvbe felvétessék, a mit a közgyűlés egyhangúlag elhatároz. Visszavonulása alkalmával a pénztárnok még módokat és utakat jelölt meg, melyek anyagi állapotunkon lendíthetnének. Elnök megigéri, hogy ezeket a választmány meg fogja szívlelni.

A közgyűlés a jelentést helyeslőleg tudomásul veszi, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenként való mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottság felolvasott jelentése alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és 1912-iki költségelőirányzatát elfogadja.

BEVÉTEL	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1910. évi zárszámadási maradvány	1610	33	1610	33
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	900	—
Hátralékos tagdijak	1500	—	572	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	200	—	200	—
Kamatok	550	—	572	58
Előfizetési dijak	700	—	714	—
Vegyesek			137	46
			6706	37

Vagyon-

VAGYON	1910. év végén Kor.	fill.	1911. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke:				
Készpénz	194	75	57	40
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	634	78	317	24
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	732	—	884	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	880	—	880	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv.	2262	—	2600	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv.	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték	10000	—	10000	—
Tagdijhátralék	2800	—	3500	—
Föl nem vett hirdetési dij	100	—	—	—
Nyomtatványokban	—	—	700	—
	17860	33	19159	44

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk.

A választmány részéről: *Kövesligethy*

Beke Manó dr. s. k. *Rátz László* s. k. ügyvivő

1912. évi költség-

BEVÉTEL	1911. évi előirányzat Kor.	fill.	1912. évi előirányzat Kor.	fill.
Zárszámadási maradvány	1610	33	1307	44
Folyó és köv. évi tagdijak	2400	—	2400	—
Hátralékos tagdijak	1500	—	1800	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	200	—	100	—
Kamatok	550	—	550	—
Előfizetési dijak	700	—	700	—
Államsegély	—	—	2000	—
Nyomtatványokból	—	—	250	—
Hiány	2087	42	535	06
	11047	75	11642	50

zárszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek a mult évre	3722	25	2400	—
a folyó évre	3277	75	—	—
Irói tiszteletdijak a mult évre	787	75	787	75
a folyó évre	2300	—	1301	25
Expeditió- és irodai költségek	800	—	691	46
Középiskolai tanulóverseny	160	—	158	—
Vegyesekre			60	47
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			57	40
b) takarékp. betétben			1250	04
			6706	37

mérleg.

TEHER	1910. év végén Kor.	fill.	1911. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	3722	25	4685	75
Irói tiszteletdijak	787	75	798	75
Tiszta vagyon	13350	33	13710	94
	17860	33	19195	44

Budapesten, 1912. évi április hó 15-én.

Radó dr. s. k.
titkár.

A közgyülés részéről:

Balog Mór s. k. *Bogyó Samu* s. k.

előirányzat.

KIADÁS	1911. évi előirányzat Kor.	fill.	1912. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai költség a mult évre	3722	25	4685	75
a folyó évre	3277	75	3200	—
Irói tiszteletdijak a mult évre	787	75	798	75
a folyó évre	2300	—	2100	—
Expeditió- és irodai költségek	800	—	700	—
Középisk. tanulóverseny	160	—	158	—
Vegyesekre				
	11047	75	11642	50

Dr. Lévay Ede
pénztárnok.

5. Tisztikar és választmányi tagok választása.

A tisztikar megbizatása lejárván, az elnökség lemond és Lévay Ede pénztárnok lemondásával új pénztárnok is választandó. Az alapszabályok 20. §-a értelmében kilépnek továbbá a választmányból: Bartoniek Géza, Lengyel Béla, Szily Kálmán és Wágner Alajos választmányi tagok.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Goldziher Károly elnöklete mellett Kőnig Dénes és Sós Ernő tagtársakból álló szavazatszedő-bizottságot küldi ki.

A választás megejtetvén, a bizottság elnöke jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 46 szavazatból a lelépett tisztikar 45 szavazattal, tehát egyhangulag, változatlan újra választatott. Pénztárnokul 45 szavazattal Privorszky Alajos választatott meg.

A választmányt a közgyűlés a következő módon egészítette ki: Bartoniek Géza és Szily Kálmán nyert 45 szavazatot, Lengyel Béla 25, Zemplén Győző 38 szavazatot.

Az újonnan megválasztottak nevében br. Eötvös Loránd mondott nehány köszönő szót.

6. Indítványok.

Indítvány nem adatván be, a napirend utolsó pontja elesik.

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés részéről ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kéri fel és a közgyűlést berekeszti.

*

A közgyűlést rendes előadó-ülés követte.

A Mathematikai és Physikai Társulat XIX. tanulóversenye.

A folyó évi október hó 12-én tartott XIX. tanulóversenyre Budapesten 42, Kolozsvárt 5 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen felvett jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 31, Kolozsvárt 4 dolgozat adatott be. A mult évhez képest a versenyzők száma Budapesten kettővel fogyott, Kolozsvárt egygyel szaporodott, ellenben a beadott dolgozatok száma Budapesten 11-gyel, Kolozsvárt 4-gyel megnőtt.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. Hány olyan n-jegyű szám van, mely csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de e három számjegy mindegyikét legalább egyszer?

2. Bebizonyítandó, hogy bármily pozitiv egész számot jelent is n,

$$5^n + 2 . 3^{n-1} + 1$$

mindenkor osztható 8-czal.

3. Bebizonyítandó, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha két szemben levő oldal négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével.

A versenydolgozatok nyomban a verseny befejezése után lepecsételtettek és előzetes birálatra Rátz László igazgató úrnak és választmányi tagnak adattak ki. A teljes biráló bizottság üléséről és határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

A XIX. mathematikai tanulóverseny biráló bizottságának jelentése.

Jelen voltak: dr. Kőnig Gyula elnöklete alatt Éberling József, Fejér Lipót, Kopp Lajos, Kőnig Dénes, Kövesligethy Radó, Kürschak József, Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán és Rátz László, mint előadó.

Az ezidei mathematikai tanulóversenyen részt vett Budapesten 42, Kolozsvárt 5 főiskolai hallgató, kik közül Budapesten 31-en, Kolozsvárt 4-en adták be dolgozatukat.

A bizottság a benyújtott dolgozatokat átvizsgálva és mértékelve, az első jutalomra Szegő Gábort, a szolnoki állami főgimnáziumban Zoltán Lipót tanítványát, ajánlja, ki nemcsak mind a három feladatot hibátlanul oldotta meg, hanem a nehezebb első tétel kidolgozásában öntudatos eljárásával kiváló elmeélt tanúsított.

A második jutalomra Neményi Pált, a budapesti VI. ker. állami főreáliskolában Oberle Károly tanítványát ajánlja, ki a második feladatot hibátlanul dolgozta ki, az elsőnek megoldásában a legegyszerűbb eljárást követte, bár a megoldás egy részletében hibás; harmadik feladatának kidolgozása csak jelentéktelen kiegészítésre szorúl.

Dicséretre ajánlja a bizottság elsősorban Vámos Dániel dolgozatát, ki Szegő mellett az egyedüli, a ki az első feladatot teljesen hibátlanul oldotta meg, továbbá Csengeri Piroska és Paunz Tivadar dolgozatait.

Budapest, 1912 október hó 27-én.

Rátz László előadó.	*Kőnig Gyula* a biz. elnöke.
Éberling József	*Kövesligethy Radó*
Fejér Lipót	*Kürschák József*
Kopp Lajos	*Rados Gusztáv*
Kőnig Dénes	*Szekeres Kálmán.*

A f. évi november hó 7-én tartott választmányi ülés e jelentést helyeslőleg tudomásul vette és a javaslathoz egyhangulag hozzájárulván, azt határozattá emelte.

A nyomban erre tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, a mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek néhány üdvözlő szóval kiosztotta a jutalmat, kérve őket, hogy volt tanáruknak is adják át a Társulat üdvözletét.

A Mathematikai és Physikai Társulat XIX. versenyén b. Eötvös díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Szegő Gábor dolgozata.

1. Hány olyan n-jegyű szám van, mely csupán az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de e három számjegy mindegyikét legalább egyszer?

Legyen az (1, 2, 3)-ból az előírt módon képezhető n jegyű számok száma k_n, akkor k_{n+1} képzési módja a következő. Először leírjuk az 1-est és betöltjük a hátralévő n helyet. Betöltjük pedig először is az (1, 2, 3)-ból már előbb képzett k_n csoporttal, azután pedig olyanokkal, melyek ezekből úgy keletkeznek, hogy 1 helyébe 2 vagy 3 lép, tekintve, hogy ezen n helyen az 1-re már szükség nincsen. (Persze a k_n-ekben az 1-esek helyett csak részben írni 2 vagy 3-ast, fölösleges, mert így nem kapunk új, a k_n-ektől kölönböző elrendezést.) Legyen az ily módon nyert elrendezések száma, tehát azon elrendezéseké, melyeket úgy nyerünk, hogy a k_n-ekben az *összes* 1-es helyébe 2 vagy 3 lép, p_n; akkor nyilván p_n nem egyéb, mint a *két* számjegyből hasonló feltételek mellett képezhető számoknak a száma. Tehát 1-gyel kezdődik $k_n + p_n$ és így

$$k_{n+1} = 3\,(k_n + p_n).$$

Foglalkozzunk p_n-nel: p_n-et úgy alkotjuk meg, hogy leírjuk az egyik számot, pl. 1-et és a hátralévő $n - 1$ helyre a lehetséges p_{n-1} csoportot. Itt is szabad az 1-esek helyett 2-est írni, mert már a kezdő helyen ott van 1. De itt csak egy új csoportot nyerünk, t. i. azt, a mely csupa 2-es. Hasonló érvényes a 2 kezdetű csoportokra. Azaz

$$\begin{aligned} p_n &= 2\,(p_{n-1} + 1) \\ &= 2p_{n-1} + 2. \\ p_{n-1} &= 2p_{n-2} + 2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_3 &= 2p_2 + 2. \end{aligned}$$

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

Szorozzuk ezen egyenleteket sorban 1, 2 ... 2^{n-3}-nal és adjuk össze:

$$p_n = 2^{n-2}p_2 + 2\,(1+2\ldots 2^{n-3})$$
$$= 2^{n-2}p_2 + 2\,(2^{n-2}-1)$$

és mivel $p_2 = 2$,

$$p_n = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2 = 2^n - 2.$$

Tehát

$$k_{n+1} = 3\,.\,k_n + 3\,.\,2^n - 6$$
$$k_n = 3\,.\,k_{n-1} + 3\,.\,2^{n-1} - 6$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k_4 = 3\,.\,k_3 + 3\,.\,.2^3 - 6.$$

Szorozzuk ezen egyenleteket sorban 1, 3 ... 3^{n-3}-mal.

$$k_{n+1} = 3^{n-2}k_3 + 3\,(2^n + 2^{n-1}\,.\,3 + \cdots 2^3\,.\,3^{n-3}) - 6\,(1+3+\cdots 3^{n-3}).$$

De

$$2^n + 2^{n-1}\,.\,3\ldots 2^3\,.\,3^{n-3} = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3-2} - (2^2\,.\,3^{n-2} + 2\,.\,3^{n-1} + 3^n)$$
$$= 3^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n-2}\,(4+6+9)$$
$$= 3^{n+1} - 2^{n+1} - 19\,.\,3^{n-2}.$$

Tehát

$$k_{n+1} = 3^{n-2}k_3 + 3^{n+2} - 3\,.\,2^{n+1} - 19\,.\,3^{n-1} - 3\,(3^{n-2} - 1)$$
$$= 3^{n-2}k_3 + 3^{n+2} - 3\,.\,2^{n+1} - 20\,.\,3^{n-1} + 3.$$

Mivel az eredményt n-re kerestük, kisebbítsük 1-gyel az indexeket és írjuk $k_3 = 6$, tekintve, hogy ez a három elem lehetséges permutáczióinak a száma. Akkor

$$k_n = 2\,.\,3^{n-2} + 3^{n+1} - 3\,.\,2^n - 20\,.\,3^{n-2} + 3.$$
$$= 3^{n+1} - 3\,.\,2^n - 18\,.\,3^{n-2} + 3$$
$$= 3^{n+1} - 3\,.\,2^n - 2\,.\,3^n + 3.$$

2. Bebizonyítandó, hogy bármily pozitiv egész számot is jelent n

$$5^n + 2\,.\,3^{n-1} + 1$$

mindenkor osztható 8-czal.

Legyen

$$f(n) = 5^n + 2\,.\,3^{n-1} + 1$$

akkor

$$5f(n) = 5^{n+1} + 2\,.\,3^{n-1}\,(3+2) + 5$$
$$= f(n+1) + 4\,(3^{n-1} + 1).$$

Tegyük fel, hogy n egy pozitiv egész értékére $f(n)$ osztható 8-czal; akkor mivel

$$3^{n-1} = (2+1)^{n-1} = 2^{n-1} + \binom{n-1}{1} 2^{n-2} \dots 1$$
$$= 2k+1$$

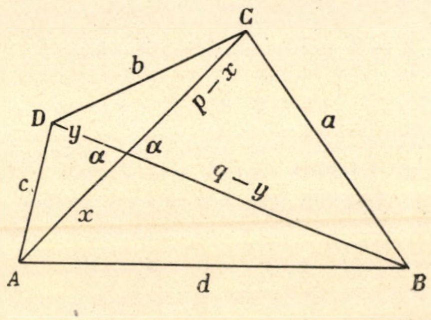
páratlan szám, $3^{n-1}+1$ páros és $4\,(3^{n-1}+1)$ osztható lesz 8-al. Azaz $f(n+1)$ is osztható 8-czal, tehát a tétel $(n+1)$-re is igaz. De ha $n = 1$,

$$f(1) = 5+2+1=8$$

azaz a tétel igaz, tehát igaz lesz n minden pozitiv egész értékére.

3. Bebizonyítandó, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha két szembenlévő oldal négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével.

Legyenek a négyszög oldalai a, b, c, d, átlói pedig p és q, ez utóbbiak részei x, $p-x$, illetve y, $q-y$. Ha az átlók α szöget zárnak be:



$$a^2+c^2 = x^2+y^2+(p-x)^2+(q-y)^2-2\cos\alpha\,\big(xy+(p-x)(q-y)\big).$$

Másrészt

$$b^2+d^2 = x^2+(q-y)^2+y^2+(p-x)^2+2\cos\alpha\,\big(x(q-y)+y(p-x)\big).$$

Tehát

$$b^2+d^2-(a^2+c^2) = 2\cos\alpha\,\big(xy+x(q-y)-q(p-x)\big)$$
$$= 2pq\cos\alpha.$$

Ha $\alpha = 90°$,

$$b^2+d^2 = a^2+c^2.$$

Ha pedig ez az egyenlőség áll fönn, szükséges, hogy

$$2pq\cos\alpha = 0,$$

mivel pedig p és q nullától különböznek,

$$\cos\alpha = 0,$$

azaz

$$\alpha = 90°.$$

A feltétel tehát szükséges és elégséges.

II. Neményi Pál dolgozata.

I. Ha nem alkalmazzuk azt a megszorítást, hogy a kérdéses n-jegyű szám tartozik az 1, 2, 3 jegyek mindegyikét tartalmazni, akkor a keresett érték 3 elemnek n-ed osztályú ismétléses variáczióinak száma, tehát 3^n. De a feladatban kitett feltételnek nem tesznek eleget azok az n-jegyű számok, melyek csak az (1, 2), csak az (1, 3), csak a (2, 3), csak az (1), csak a (2) és csak a (3) jegyeket tartalmazzák. Ki kell tehát vonnunk a 3 elem n-ed oszt. ismétléses variáczióinak számából háromszor 2 elem ismétléses variáczióinak és ugyancsak 3-szor egy-egy elem ismétléses variáczióinak számát. A kérdéses érték tehát

$$N = V_3^{in} - 3V_2^{in} - 3V_1^{in} = 3^n - 32^n - 31^n = 3(3^{n-1} - 2^n - 1).$$

II. A tétel az $n = 1$ esetre közvetlenül világos.

$$5^1 + 2 . 3^0 + 1 = 8.$$

Tegyük fel, hogy tételünk igaz az $n = \nu$ esetre és bizonyítsuk be, hogy ez esetben szükségkép igaz a $n = \nu + 1$ esetben is.

Legyen

$$5^\nu + 2 . 3^{\nu-1} + 1 = A_\nu = 8k$$

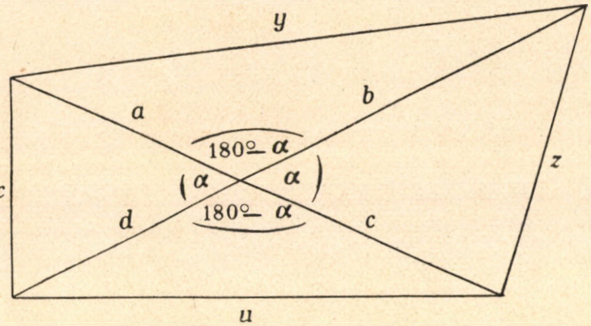
hol k poz. egész számot jelent.

$$\begin{aligned} A_{\nu+1} &= 5^{\nu+1} + 2 . 3^\nu + 1 = 5 . 5^\nu + 3(2 . 3^{\nu-1}) + 1 \\ &= 5(5^\nu + 2 . 3^{\nu-1}) - 2 . 2 . 3^{\nu-1} - 4 \\ &= 5A_\nu - 4(3^{\nu-1} - 1). \end{aligned}$$

Minden különbség osztható valamely számmal, ha kisebbítendője és kivonandója egyaránt oszthatók vele. A különbség kisebbítendője feltételünk szerint 8-nak többszöröse. hogy tehát $A_{\nu+1}$ osztható legyen 8-czal, ahhoz csak az kell, hogy a kivonandó osztható legyen 8-czal. A kivonandó szorzat, melynek első tényezője 4, második tényezője 3-nak egész kitevőjű hatványa, minus 1. De minden páratlan szám hatványa is páratlan, tehát a kivonandót alkotó szorzat második tényezője páros.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $A_{\nu+1}$ osztható 8-czal, feltéve, hogy A_ν osztható 8-czal. De A_1 osztható vele, tehát A_2 is és így tovább.., A_n is.

III. Vegyünk fel egy tetszőleges négyszöget s húzzuk meg annak átlóit.



Az ábrában használt jelölés szerint a következő összefüggések állanak fenn

$$x^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha$$
$$y^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$$
$$z^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$u^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha$$

tehát

$$x^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \cos \alpha \, (bc + ad) \qquad (1)$$
$$y^2 + u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2 \cos \alpha \, (-ab - cd). \qquad (2)$$

Mindkét egyenletet megoldjuk cos α-ra nézve

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - x^2 y^2}{2\,(bc + bd)} \qquad (1_a)$$
$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - y^2 - u^2}{2\,(-ab - cd)} \qquad (2_a)$$

cos α akkor és csakis akkor lesz 0, tehát α akkor és csakis akkor lesz 90°, ha

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - x^2 - z^2 = 0 \qquad (1_b)$$

és

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - y^2 - u^2 = 0. \qquad (2_b)$$

Tehát ha

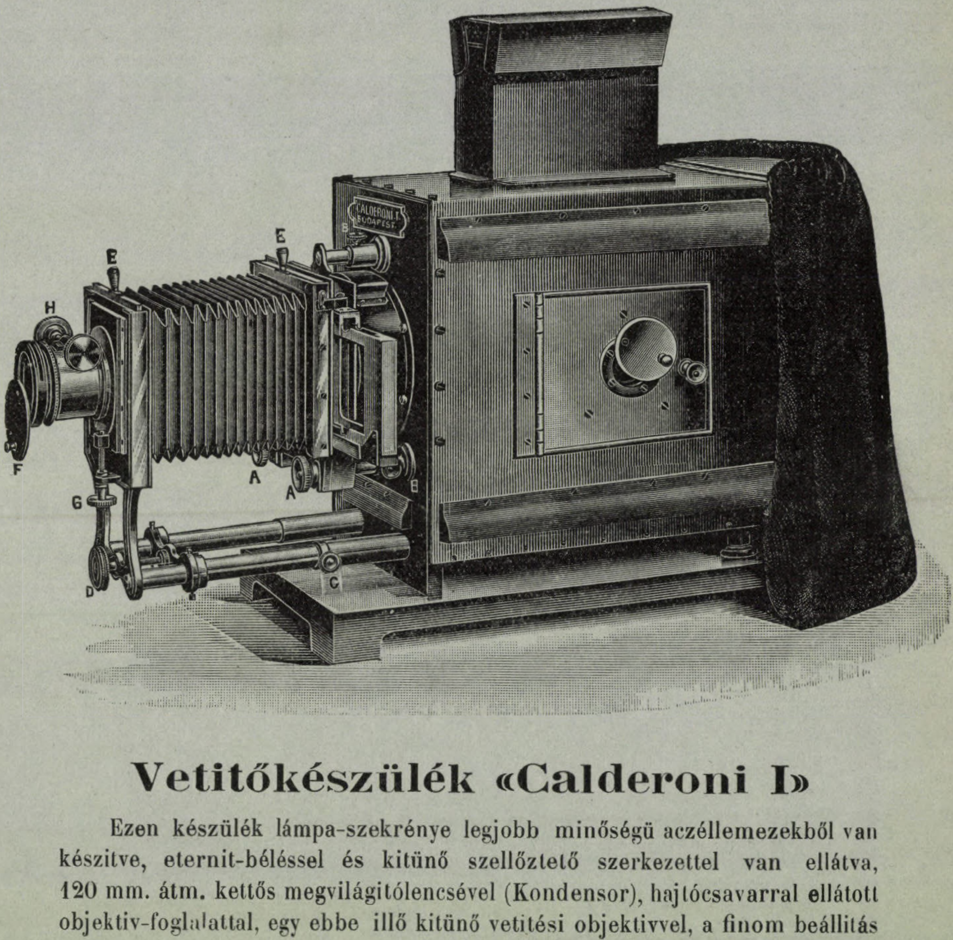
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + z^2 = y^2 + u^2$$

q. e. d.

Calderoni mű- és tanszervállalat r.-t.

Budapest, IV., Váci-utca 50.

Ajánlja saját szerkesztésü szabadalmazott vetitőkészülékeit.



Vetitőkészülék «Calderoni I»

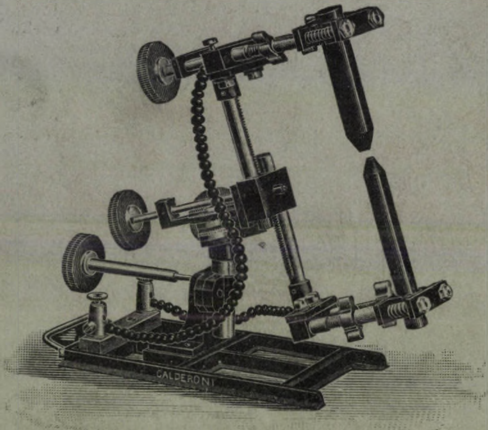
Ezen készülék lámpa-szekrénye legjobb minőségü aczéllemezekből van készitve, eternit-béléssel és kitünő szellőztető szerkezettel van ellátva, 120 mm. átm. kettős megvilágitólencsével (Kondensor), hajtócsavarral ellátott objektiv-foglalattal, egy ebbe illő kitünő vetitési objektivvel, a finom beállitás részére szolgáló mikrometer-csavarral és tolószerkezettel ellátott kettős képváltó kerettel van felszerelve. A kondensor-lencsék a lámpatartó szekrényen kivü vannak elhelyezve és a lencsék közt felmelegedő levegő a kondensort tartó cső felső részén levő és egy kis fedővel boritott nyiláson át távozhatik. A kondensor mögött egy kali-üvegből készített védőlemez van elhelyezve. — A készülék, mely egy áttört vastalapzatra van felszerelve, teljesen fémből van készitve. — A bronzból készített objektivet tartó előrész egy mikrometer-csavar segélyével magasabbra és mélyebbre állítható. Az oldalajtóval és bársonyból készült fényelzáró-függönynyel ellátott készülék ára fenti felszereléssel *lámpa nélkül* K **260.**—

Vetitőkészülék «Calderoni I. H.»

Ezen készülék, mely ugyanolyan szerkezetű mint a túloldali, egy általunk szerkesztett hütővel van még ellátva, mely a megvilágitó lencsék közé van igtatva. — Ezen felszerelés vetitő készülékünket a legtökéletesebb ilynemű készülékké avatja. Ára *lámpa nélkül* K **350**.—

A vetitőkészülékeinkhez felszerelt hajtócsavarral ellátott objektiv foglalatba tetszés szerinti 6 különféle gyútávolságu vetitési objectivet lehet elhelyezni, melynek gyútávolsága 150, 200, 250, 310, 355, 405, mm. — Minden készülékhez a fentjelzett árban csak egy darab ilyen vetitési objektiv tartozik. — Minden további objektiv ára darabonként K **24**.—

Vetitőkészülékeink a merőleges és vizszintes síkban végbemenő vetitésre, valamint mikroskopikus vetitésre is, úgyszintén szinképek, interferenciális tünemények, fényelhajlási, fénysarkitási és kettős törési kisérletek stb. vetitésére is alkalmasak. Ezen mellékeszközökről addig is, mig az ezekről szóló külön árjegyzékünk meg fog jelenni, kivánatra szivesen küldünk részletes költségvetéseket. Vetitőkészülékeinket — melyek a legtökéletesebbek — tetszés szerinti fényforrással, u. m. villamos ívfénynyel, mészfénynyel, acetylénnel, borszesz-izzófénynyel stb. szállitjuk.



Elektromos ívlámpa legjobb minőségü és felette erős szerkezetü (mellékelt ábra szerint) mely hajtócsavarok segélyével minden irányban könnyen mozgatható, 110—220 volt feszültségü egyen- vagy váltóáramhoz, 5—50 Ampère áramerősségig használható. Ára K **120**.—

Elektromos ívlámpa egyszerübb és könnyebb szerkezetü. Ára K **90**.—

Borszesz-izzófénylámpa légsüritővel ellátva, mely 300 gyertyafény erejü világitást szolgáltat. Ára teljesen felszerelve K **50**.—

Háromlábu asztalállvány, mely hajtócsavar-szerkezet segélyével magasabbra és mélyebbre állitható, felső lapja pedig a vetitőkészülék által esetleg megkivánt szög alá, illetve ferde állásba hozható. Ára K **110**.—

Vetitési ernyő finom vászonból 200 cm. négyzetben, gyürükkel ellátva. Ára K **8**.—

Ernyő-állvány fenti ernyő részére, mely könnyen és gyorsan szétszedhető. Ára szekrényben K **30**.—

Vetitési ernyők zsinórral felhúzható szerkezettel. — Ezen ernyők legczélszerűbben a falra erősitendő 2 vastámaszra szerelendők, azonban bárhová, esetleg közvetlenül a falra is felerősithetők. — Az ernyők árai a következők:

	200	240	300	360	420	480 cm. négyzetben
Ára	**45.**—	**65.**—	**90.**—	**145.**—	**200.**—	**240.**— korona.

Calderoni mű- és tanszervállalat részvénytársaság, Budapest, IV., Váci-utca 50.

Részletes nagy árjegyzék vetitőkészülékeinkről munkában van.

Franklin-Társulat nyomdája